Міністерство освіти і науки України

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника"
Кафедра фізики і хімії твердого тіла

Методи математичної фізики

(для дистанційного навчання,
на прикладі рекомендованого посібника
П.М. Мартинюка [4])

Програма вивчення нормативної навчальної дисципліни "методи математичної фізики" складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра напряму підготовки спеціальності "6.040203" фізика".

Укладник і розробник програми
д.ф.-м.н., проф. Рувінський М.А.

(Шифр за ООП 3.02)

Вступ

На вивчення програми навчальної дисципліни "методи математичної фізики" відводиться 216 годин (6,0 кредитів EKTS).

Рік підготовки 2 і 3-й, кілька кредитів на 4-й семестр – 4,0, на 5-й семестр – 2,0.

Обсяг лекційної тематики відповідає 62 год., практичної роботи – 40 год., самостійної та індивідуальної роботи – 116 год.

Вид контролю: **екзамен, залік**.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є розгляд основних методів математичної фізики з різними диференціальними (та інтегральними) рівняннями в частинних похідних і теорії спеціальних функцій, необхідних для опису фізичних закономірностей макроскопічної та мікроскопічної фізики.

Міждисциплінарні зв'язки: курс вищої математики (математичний аналіз, теорія звичайних диференціальних рівнянь, аналітична геометрія, вища алгебра, теорія функцій комплексних змінних), курси загальної і теоретичної фізики).

Метою навчальної дисципліни "Методи математичної фізики" є засвоєння класифікації диференціальних рівнянь в частинних похідних, приведення до канонічного виду, вивчення основних методів розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь математичної фізики та їх застосувань.

Основними завданнями вивчення дисципліни "Методи математичної фізики" є отримання математичних знань, необхідних для подальшого засвоєння курсів теоретичної фізики та використання для підготовки курсових і дипломних робіт, у науково-дослідній роботі студентів.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні:

знати: основні методи математичної фізики, пов'язані з теорією диференціальних рівнянь в частинних похідних, інтегральних рівнянь, виявляти їх значення та використання в типових задачах різних розділів теоретичної та прикладної фізики;

вміти: приводити рівняння математичної фізики до канонічного виду, складати і розв'язувати рівняння методами біжучих і стоячих хвиль, використовувати інтегральні перетворення, наближені методи і властивості основних типів спеціальних функцій.

Методичне забезпечення: тести, додаткова література.

ЗМІСТ

Вступ... 2

Розділ 1. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними.. 7
Тема 1. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними.. 7
§1.1 Диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними................................ 7
§1.2 Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними... 8
§1.3 Канонічний вигляд диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку.. 14
§1.4 Канонічні форми лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами................ 17

Практична робота №1. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку................................ 19
Завдання для самостійної роботи... 21

Практична робота №2. Зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами…....……………………...........…...… 23
Завдання для самостійної роботи... 25

Розділ 2. Рівняння гіперболічного типу.. 26
Тема 2. Хвильове рівняння та постановки крайових задач......... 26
§2.1 Рівняння коливань струни.. 26
§2.2 Граничні та початкові умови. Їх фізична інтерпретація........ 29
§2.3 Класифікація крайових задач... 31
§2.4 Поняття про коректність постановки крайової задачі............ 32
§2.5 Некоректні задачі математичної фізики................................ 32
§2.6 Редукція загальної задачі.. 34
Тема 3. Задача Коші для хвильового рівняння............................. 35
§3.1 Метод характеристик. Формула Д'Аламбера........................ 35
§3.2 Формули Пуассона та Кірхгофа.. 39
§3.3 Коректність постановки задачі Коші..................................... 41
§3.4 Узагальнений розв'язок задачі Коші...................................... 44

Практична робота №3. Задача Коші для рівнянь гіперболічного типу. Метод характеристик.. 47
Завдання для самостійної роботи.. 49

Тема 4. Метод розділення змінних (метод Фур'є) для гіперболічних рівнянь.. 51
§4.1 Перша мішана крайова задача для однорідного хвильового рівняння (вільні коливання струни).. 51
§4.2 Перша мішана крайова задача для неоднорідного хвильового рівняння (вимушені коливання струни)............. 55
§4.3 Перша мішана крайова задача для неоднорідного хвильового рівняння з неоднорідними граничними умовами.. 59
§4.4 Перша мішана крайова задача для однорідного хвильового рівняння в прямокутнику (вільні коливання прямокутної мембрани).. 59

Практична робота №4. Метод розділення змінних (метод Фур'є) для рівнянь гіперболічного типу……….................................. 63
Завдання для самостійної роботи.. 67

Тема 5. Спеціальні функції математичної фізики......................... 69
§5.1 Загальна задача Штурма-Ліувілля.. 69
§5.2 Спеціальні функції математичної фізики.............................. 72
Тема 6. Позначення та криволінійні координати в математичній фізиці.. 75
§6.1 Диференціальні операції в криволінійних координатах........ 75
§6.2 Метод розділення змінних (метод Фур'є) для першої мішаної крайової задачі для однорідного хвильового рівняння в крузі.. 77
Розділ 3. Рівняння параболічного типу.. 80
Тема 7. Рівняння параболічного типу та фізичні задачі, що до них приводять.. 80
§7.1 Фізичні процеси, які приводять до рівнянь параболічного типу... 80
§7.2 Принцип максимуму.. 84
§7.3 Граничні та початкові умови. Їх фізична інтерпретація......... 87
Тема 8. Метод розділення змінних для параболічних рівнянь...... 88
§8.1 Перша мішана крайова задача для одновимірного параболічного рівняння... 90
§8.2 Перша мішана крайова задача для параболічного рівняння в прямокутнику.. 93

§8.3 Перша мішана крайова задача для параболічного рівняння в крузі.. 95

Практична робота №5. Метод розділення змінних для рівнянь параболічного типу……………….........………………..... 97
Завдання для самостійної роботи... 101

Тема 9. Задача Коші для рівнянь параболічного типу….. 102
§9.1 Постановка задачі Коші для параболічних рівнянь............... 102
§9.2 Метод розділення змінних (метод Фур'є) для задачі Коші в одновимірному випадку... 102
§9.3 Задача Коші в n–вимірному просторі.................................... 105

Практична робота №6. Задача Коші для рівнянь параболічного типу... 107
Завдання для самостійної роботи... 112

Тема 10. Єдиність та стійкість розв'язків крайових задач для рівнянь параболічного типу.. 113
§10.1 Єдиність та стійкість розв'язків мішаних крайових задач…………………………………………............… 113
§10.2 Єдиність розв'язку задачі Коші... 116
§10.3 Неперервна залежність розв'язку задачі Коші від початкових умов та інтенсивності внутрішніх джерел тепла 117
Розділ 4. Рівняння еліптичного типу... 119
Тема 11. Еліптичні рівняння та фізичні процеси, які до них приводять.. 119
§11.1 Фізичні процеси, що приводять до рівнянь еліптичного типу... 119
§11.2 Постановки крайових задач для еліптичних рівнянь............. 120
§11.3 Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа……............... 121
Тема 12. Принцип максимуму та коректність крайових задач для рівнянь еліптичного типу……………………………….. 122
§12.1 Принцип максимуму та його наслідки.................................. 122
§12.2 Єдиність та неперервна залежність від граничних умов розв'язку задачі Діріхле... 124
§12.3 Формули Гріна.. 125
§12.4 Єдиність розв'язку задачі Неймана....................................... 127
§12.5 Єдиність розв'язку першої мішаної крайової задачі для гіперболічних рівнянь... 128
Тема 13. Метод розділення змінних (метод Фур'є) для еліптичних рівнянь……………….. 130
§13.1 Задача Діріхле для рівняння Лапласа в прямокутнику.......... 130
§13.2 Задача Діріхле для рівняння Лапласа в крузі......................... 134
§13.3 Інтеграл Пуассона.. 136

Практична робота №7. Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу.... 137
Завдання для самостійної роботи.. 140

Тема 14. **Метод функції Гріна**.. 141
§14.1 Основна інтегральна формула Гріна та основна формула теорії гармонічних функцій……………..............................… 141
§14.2 Функція Гріна для оператора Лапласа.................................... 145
§14.3 Приклади функцій Гріна для деяких областей……................ 147
Тема 15. **Елементи теорії потенціалу**.. 149
§15.1 Потенціал об’єму, простого та подвійного шарів.................. 149
§15.2 Властивості потенціалів.. 150
§15.3 Логарифмічні потенціали.. 152
Розділ 5. **Елементи теорії інтегральних рівнянь**............................. 154
Тема 16. **Класифікація інтегральних рівнянь**................................. 154
§16.1 Класифікація лінійних інтегральних рівнянь........................ 154
§16.2 Інтегральні рівняння з виродженими ядрами……................... 155
§16.3 Теореми Фредгольма... 156
Тема 17. **Наближені методи розв’язання інтегральних рівнянь**..... 158
§17.1 Метод послідовних наближень... 158
§17.2 Наближені методи розв’язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.. 162
§17.3 Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду.................. 163
§17.4 Деякі методи розв’язання некоректних задач……................. 164
Тема 18. **Зведення крайових задач для рівнянь еліптичного типу до розв’язування інтегральних рівнянь**………………….. 169
§18.1 Задача Діріхле для рівняння Лапласа.................................... 169
§18.2 Задача Неймана для рівняння Лапласа.................................. 170
§18.3 Задача Діріхле для рівняння Пуассона.................................. 171

Література 172

РОЗДІЛ 1
КЛАСИФІКАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ДВОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ

ТЕМА 1. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними

§1.1. Диференціальні рівняння з частинними похідними з двома незалежними змінними

Основу класичної теорії рівнянь математичної фізики складають диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку. І це не дивно, адже дуже багато фізичних процесів можна описати саме такими рівняннями. Цим рівнянням і приділимо головну увагу в даному посібнику.

Для спрощення розглянемо рівняння, де шукана функція залежить від двох незалежних змінних. Для більшого числа змінних це питання детально викладено в [4, 11, 15, 18, 34, 45, 49].

Дамо необхідні визначення.

Диференціальним рівнянням з частинними похідними (ДРЧП) другого порядку з двома незалежними змінними x, y називається співвідношення між невідомою функцією $u(x, y)$ та її частинними похідними до 2-го порядку включно

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Тут $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $u_{yy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Рівняння називається ***лінійним відносно старших похідних***, якщо воно має вигляд

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \qquad (1.1)$$

де a_{11}, a_{12}, a_{22} є функціями змінних x, y.

Якщо коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{22} рівняння (1.1) залежать не лише від x, y, але і від u, u_x, u_y, то таке рівняння називається ***квазілінійним***.

ДРЧП називається ***лінійним***, якщо воно лінійне як відносно старших похідних u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, так і відносно функції $u(x, y)$ та її перших похідних u_x, u_y

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0, \quad (1.2)$$

де $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ – функції лише змінних x, y.

Якщо коефіцієнти ДРЧП (1.2) не залежать від змінних x, y, то дане рівняння називається ***лінійним ДРЧП зі сталими коефіцієнтами***.

Рівняння (1.2) називається ***однорідним***, якщо $f(x, y) \equiv 0$.

§1.2. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними

За допомогою перетворення змінних

$$\xi = \varphi(x, y), \ \eta = \psi(x, y),$$

для якого існує обернене перетворення, ми отримаємо нове рівняння, еквівалентне попередньому. Виникає питання: яким чином вибрати функції $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$, так, щоб рівняння в змінних ξ та η мало найбільш просту форму? В даному параграфі ми дамо відповідь на поставлене питання для рівнянь, лінійних відносно старших похідних.

Перетворюючи похідні до нових змінних, отримаємо

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}, \quad (1.3)$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}.$$

Зауваження 1.1. *Згадаємо правило диференціювання складних функцій, що відоме нам з математичного аналізу (див., наприклад*

[41], глава II, §5, глава V, §1; [32]) і на основі якого виводяться формули (1.3). Нехай функція $u(x,y) \equiv u(\xi(x,y),\eta(x,y))$. *Згідно класичного означення похідної*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(\xi(x+\Delta x, y), \eta(x+\Delta x, y)) - u(\xi(x,y),\eta(x,y))}{\Delta x}.$$

Тоді

$$\begin{gathered} u(\xi(x+\Delta x, y), \eta(x+\Delta x, y)) - u(\xi(x,y), \eta(x,y)) = \\ = [u(\xi(x+\Delta x, y), \eta(x+\Delta x, y)) - u(\xi(x,y), \eta(x+\Delta x, y)] + \\ + [u(\xi(x,y), \eta(x+\Delta x, y)) - u(\xi(x,y), \eta(x,y)]. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Використовуючи розклад в ряд Тейлора функцій $\xi(x,y)$ *та* $\eta(x,y)$

$$\xi(x+\Delta x, y) = \xi(x,y) + \frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x + O(\Delta x^2),$$

$$\eta(x+\Delta x, y) = \eta(x,y) + \frac{\partial \eta}{\partial x}\Delta x + O(\Delta x^2)$$

та формулу Лагранжа, для першої різниці з (1.4) отримаємо

$$u(\xi(x+\Delta x, y), \eta(x+\Delta x, y)) - u(\xi(x,y), \eta(x+\Delta x, y)) =$$

$$= u\left(\xi(x,y) + \frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x + O(\Delta x^2), \eta(x+\Delta x, y)\right) - u\big(\xi(x,y), \eta(x+\Delta x, y)\big) =$$

$$= \frac{\partial u\left(\xi(x,y) + \Theta \cdot \left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x + O(\Delta x^2)\right], \eta(x+\Delta x, y)\right)}{\partial \xi} \times \tag{1.5}$$

$$\times \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x + O(\Delta x^2)\right),$$

де $0 < \Theta < 1$. *Нагадаємо, що, наприклад, у випадку функції однієї змінної* $y = f(x)$ *формула Лагранжа набуває вигляду*

$$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(a + \Theta[b-a]),\ 0 < \Theta < 1.$$

Проводячи аналогічні міркування для другої різниці в (1.4), маємо

$$u(\xi(x,y),\eta(x+\Delta x,y)) - u(\xi(x,y),\eta(x,y)) =$$
$$= u\left(\xi(x,y) + \frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x + O(\Delta x^2), \eta(x+\Delta x,y)\right) - u(\xi(x,y),\eta(x+\Delta x,y)) =$$
$$= \frac{\partial u\left(\xi(x,y),\eta(x,y) + \Theta_1\cdot\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x + O(\Delta x^2)\right]\right)}{\partial\eta}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x + O(\Delta x^2)\right), \tag{1.6}$$

де $0 < \Theta_1 < 1$. *Враховуючи (1.5), (1.6) та нехтуючи нескінченно малими вищих порядків, з (1.4) випливає наступна рівність:*

$$u(\xi(x+\Delta x,y),\eta(x+\Delta x,y)) - u(\xi(x,y),\eta(x,y)) =$$
$$= \frac{\partial u\left(\xi(x,y) + \Theta\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x, \eta(x+\Delta x,y)\right)}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x +$$
$$+ \frac{\partial u\left(\xi(x,y),\eta(x,y) + \Theta_1\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x\right)}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x,$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\xi(x+\Delta x,y),\eta(x+\Delta x,y)) - u(\xi(x,y),\eta(x,y))}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\partial u\left(\xi(x,y) + \Theta\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x, \eta(x+\Delta x,y)\right)}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial u\left(\xi(x,y),\eta(x,y) + \Theta_1\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x\right)}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right] = \frac{\partial u(\xi(x,y),\eta(x,y))}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} +$$
$$+ \frac{\partial u(\xi(x,y),\eta(x,y))}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} = u_\xi\cdot\xi_x + u_\eta\cdot\eta_x.$$

Таким чином, отримана перша формула з (1.3).

Щодо виведення формул для других похідних, то потрібно скористатись правилом знаходження похідної добутку, а також вже виведеними формулами для перших похідних. Так, наприклад,

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) = \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x) = \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_x) + \frac{\partial}{\partial x}(u_\eta \eta_x) =$$

$$= \xi_x \frac{\partial u_\xi}{\partial x} + u_\xi \xi_{xx} + \eta_x \frac{\partial u_\eta}{\partial x} + u_\eta \eta_{xx} = \xi_x (u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + u_\xi \xi_{xx} +$$

$$+ \eta_x (u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) + u_\eta \eta_{xx} =$$

$$= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}.$$

Аналогічно виводяться інші формули. Зауважимо, що для справедливості вищенаведених міркувань потрібно вимагати, щоб функції u, ξ, η *були достатньо гладкими і, щонайменше, двічі неперервно диференційовними.*

Підставляючи значення похідних з (1.3) в рівняння (1.1), маємо

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \qquad (1.7)$$

де

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,$$

а функція $\bar{F}$ *не залежить від похідних другого порядку. Відмітимо, що якщо початкове рівняння лінійне, тобто*

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f,$$

то

$$\bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u + \delta$$

і рівняння залишається лінійним.

Виберемо змінні ξ *та* η *таким чином, щоб коефіцієнт* $\bar{a}_{11}$ *став рівним нулю. Це робиться наступним чином. Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку*

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0. \qquad (1.8)$$

Нехай $z=\varphi(x,y)$ *– будь-який частинний розв`язок даного рівняння. Якщо покласти* $\xi=\varphi(x,y)$, *то коефіцієнт* $\bar{a}_{11}$, *очевидно, буде дорівнювати нулю. Таким чином, задача про вибір нових незалежних змінних пов'язана з відшуканням розв'язків рівняння (1.8).*

Теорема 1.1. Для того, щоб функція $z=\varphi(x,y)$ була частинним розв'язком рівняння (1.8), необхідно і достатньо, щоб співвідношення $\varphi(x,y)=c$, де $c=const$, являло собою загальний інтеграл звичайного диференціального рівняння

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0. \qquad (1.9)$$

Доведення. Необхідність. *Нехай функція* $z=\varphi(x,y)$ *є частинним розв`язком рівняння (1.8). Тоді рівність*

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}=0 \qquad (1.10)$$

є тотожністю: вона виконується для всіх x, y *в тій області, де заданий розв`язок* $z=\varphi(x,y)$. *Співвідношення* $\varphi(x,y)=c$, $c=const$ *буде загальним інтегралом рівняння (1.9), якщо функція, визначена з неявної залежності* $\varphi(x,y)=c$, *задовольняє рівняння (1.9). Нехай* $y=f(x,c)$ *є такою функцією. Тоді*

$$\frac{dy}{dx}=-\left[\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right]_{y=f(x,c)}, \qquad (1.11)$$

де дужки та нижній індекс вказують, що в правій частині рівності (1.11) змінна y *не є незалежною змінною, а набуває значень згідно функціональної залежності* $y=f(x,c)$. *Звідси випливає, що функція* $y=f(x,c)$ *задовольняє рівняння (1.9), оскільки*

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=\left[a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}\right]_{y=f(x,c)}=0$$

і згідно (1.10) вираз в квадратних дужках рівний нулю при всіх значеннях x *та* y, *а не лише при* $y=f(x,c)$.

Достатність. *Нехай* $\varphi(x,y)=c$, $c=const$ *– загальний інтеграл рівняння (1.9). Доведемо, що*

$$a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=0 \qquad (1.12)$$

для будь-якої точки (x,y). *Нехай* (x_0,y_0) *- будь-яка задана точка. Якщо ми доведемо, що в ній виконується рівність (1.12), то, в силу довільності* (x_0,y_0), *буде випливати, що* $z=\varphi(x,y)$ *є частинним розв'язком рівняння (1.8). Проведемо через точку* (x_0,y_0) *інтегральну криву рівняння (1.9). Нехай* $\varphi(x_0,y_0)=c_0$. *Розглянемо криву* $y=f(x,c_0)$. *Очевидно, що* $y_0=f(x_0,c_0)$. *Для всіх точок цієї кривої маємо*

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=\left[a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}\right]_{y=f(x,c_0)}=0.$$

З останньої рівності при $x=x_0$ *отримаємо*

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0,y_0)+2a_{12}\varphi_x(x_0,y_0)\varphi_y(x_0,y_0)+a_{22}\varphi_y^2(x_0,y_0)=0,$$

що й потрібно було довести.

Теорема 1.1 доведена.

Рівняння (1.9) називається ***характеристичним*** для рівняння (1.1), а його інтеграли –***характеристиками***.

Покладаючи $\xi=\varphi(x,y)$, де $\varphi(x,y)=const$ є загальним інтегралом рівняння (1.9), ми, згідно теореми 1.1, перетворюємо в нуль коефіцієнт при похідній $u_{\xi\xi}$. Якщо $\psi(x,y)=const$ є другим загальним інтегралом рівняння (1.9), незалежним від $\varphi(x,y)$, то покладаючи $\eta=\psi(x,y)$, ми перетворимо в нуль також і коефіцієнт при похідній $u_{\eta\eta}$.

Поділимо ліву та праву частини рівняння (1.9) на $(dx)^2$. Маємо

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0.$$

Розв'язуючи отримане квадратне рівняння відносно невідомої "змінної" $\frac{dy}{dx}$, дістанемо, що рівняння (1.9) еквівалентне двом наступним рівнянням:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{1.13}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{1.14}$$

Знак підкореневого виразу в (1.13), (1.14) визначає тип рівняння (1.1).

Рівняння (1.1) ми будемо називати в точці $M(x, y)$ *рівнянням* **гіперболічного** *типу, якщо в точці* $M(x, y)$: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$*;* **параболічного** *типу, якщо в точці* $M(x, y)$: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$*;* **еліптичного** *типу, якщо в точці* $M(x, y)$: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.

Неважко впевнитися в правильності співвідношення $\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)J^2$, *де* $J = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y$. *З даної рівності випливає інваріантність типу рівняння при перетворенні змінних, оскільки якобіан перетворення* J *відмінний від нуля. Рівність* $J \equiv 0$ *суперечить умові незалежності загальних інтегралів* $\varphi(x, y) = const$, $\psi(x, y) = const$ *рівняння (1.9). В різних точках області визначення рівняння може належати різним типам.*

§1.3. Канонічний вигляд диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

Розглянемо область G, *в усіх точках якої рівняння (1.1) має один і той самий тип. Через кожну точку області* G *проходять дві характеристики, причому для рівнянь гіперболічного типу характеристики дійсні і різні, для рівнянь еліптичного типу – комплексні і різні, а для рівнянь параболічного типу дві характеристики дійсні і співпадають.*

Розберемо кожен з цих випадків окремо.

1. Для рівняння гіперболічного типу $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ і праві частини рівнянь (1.13) та (1.14) дійсні і різні. Їх загальні інтеграли $\varphi(x, y) = const$, $\psi(x, y) = const$ визначають дійсні сім'ї характеристик. Покладаючи

$$\xi = \varphi(x, y), \ \eta = \psi(x, y), \tag{1.15}$$

приводимо рівняння (1.7) після ділення на коефіцієнт при $u_{\xi\eta}$ до виду

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \tag{1.16}$$

де $\Phi = -\dfrac{\overline{F}}{2\overline{a}_{12}}$. Це – канонічна форма рівнянь гіперболічного типу. Часто користуються іншою канонічною формою. Покладемо

$$\xi = \alpha + \beta, \ \eta = \alpha - \beta,$$

тобто,

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \ \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

де α *і* β *- нові незалежні змінні. Тоді*

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \ u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \ u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$$

і рівняння (1.16) набуде вигляду

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1,$$

де $\Phi_1 = 4\Phi$.

2. Для рівнянь параболічного типу $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$. *Рівняння (1.13), (1.14) співпадають і загальним інтегралом рівняння (1.9) є* $\varphi(x, y) = const$. *Покладемо в даному випадку* $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, *де* $\eta(x, y)$ *- довільна функція, незалежна від* $\varphi(x, y)$. *Тоді*

$$\overline{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 = 0,$$

оскільки з рівності $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ *маємо* $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$. *Звідси випливає*

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$
$$= \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) = 0.$$

Після ділення рівняння (1.7) на коефіцієнт при $u_{\eta\eta}$, *отримаємо канонічну форму рівняння параболічного типу*

$$u_{\eta\eta} = \Phi\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right),$$

де $\Phi = -\dfrac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}$.

3. Для рівняння еліптичного типу $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ *і праві частини диференціальних рівнянь (1.13), (1.14) різні та комплексно спряжені. Нехай* $\varphi(x, y) = const$ *- комплексний інтеграл рівняння (1.13). Тоді* $\varphi^*(x, y) = const$, *де* $\varphi^*(x, y)$ *- спряжена функція до* $\varphi(x, y)$, *буде являти собою загальний інтеграл спряженого рівняння (1.14). Перейдемо до комплексних змінних, ввівши заміну*

$$\xi = \varphi(x, y),\ \eta = \varphi^*(x, y).$$

При цьому рівняння еліптичного типу зводиться до такого ж виду, що й гіперболічне. Оскільки в даному посібнику ми будемо розглядати рівняння лише з дійсними коефіцієнтами, то введемо нові дійсні змінні α *і* β *за правилом*

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2},\ \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}, \tag{1.17}$$

тобто,

$$\xi = \varphi(x, y) = \alpha + i\beta,\ \eta = \varphi^*(x, y) = \alpha - i\beta.$$

З (1.17) випливає, що

$$\alpha = \varsigma(x, y),\ \ \beta = \omega(x, y),$$

де $\varsigma(x, y) = \dfrac{\varphi + \varphi^*}{2}$, $\omega(x, y) = \dfrac{\varphi - \varphi^*}{2i}$ *і рівняння (1.1) набуває вигляду*

$$\bar{a}_{11}^{(\alpha,\beta)} \cdot u_{\alpha\alpha} + 2\bar{a}_{12}^{(\alpha,\beta)} \cdot u_{\alpha\beta} + \bar{a}_{22}^{(\alpha,\beta)} \cdot u_{\beta\beta} + \bar{F}^{(\alpha,\beta)} = 0, \tag{1.18}$$

де

$$\bar{a}_{11}^{(\alpha,\beta)} = a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2,$$
$$\bar{a}_{12}^{(\alpha,\beta)} = a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y,$$

$$\overline{a}_{22}^{(\alpha,\beta)} = a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2,$$

а функція $\overline{F}^{(\alpha,\beta)}$ *не залежить від похідних другого порядку. Тоді*

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2\right) -$$

$$-\left(a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2\right) + 2i\left(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}\left(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x\right) + a_{22}\alpha_y\beta_y\right) =$$

$$= \overline{a}_{11}^{(\alpha,\beta)} - \overline{a}_{22}^{(\alpha,\beta)} + 2i\overline{a}_{12}^{(\alpha,\beta)} = 0.$$

Тобто, $\overline{a}_{11}^{(\alpha,\beta)} = \overline{a}_{22}^{(\alpha,\beta)}$ і $\overline{a}_{12}^{(\alpha,\beta)} = 0$. Це випливає з вищенаведеної рівності двох комплексних чисел: два комплексні числа рівні, якщо їх дійсні та уявні частини рівні. В результаті рівняння (1.18), після ділення на коефіцієнт при $u_{\alpha\alpha}$, набуде вигляду

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi\left(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta\right),$$

де $\Phi = -\dfrac{\overline{F}^{(\alpha,\beta)}}{\overline{a}_{11}^{(\alpha,\beta)}}$.

Таким чином, в залежності від знаку виразу ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$) мають місце наступні канонічні форми рівняння (1.1):

гіперболічний тип $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$: $u_{xx} - u_{yy} = \Phi(x, y, u, u_x, u_y)$ *або* $u_{xy} = \Phi(x, y, u, u_x, u_y)$;

параболічний тип $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$: $u_{xx} = \Phi(x, y, u, u_x, u_y)$;

еліптичний тип $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$: $u_{xx} + u_{yy} = \Phi(x, y, u, u_x, u_y)$.

§1.4. Канонічні форми лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами

Припустимо, що в рівнянні (1.2) коефіцієнти є сталими. Тоді за допомогою відповідного перетворення змінних дане рівняння зводиться до одного з наступних канонічних видів:

$$u_{\xi\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \text{ або}$$

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \text{ (гіперболічний тип);} \qquad (1.19)$$

$$u_{\xi\xi} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \text{ (параболічний тип);} \qquad (1.20)$$

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+b_1u_\xi+b_2u_\eta+cu+f=0 \text{ (еліптичний тип).} \qquad (1.21)$$

Для подальшого спрощення проведемо заміну $u(\xi,\eta)=\upsilon(\xi,\eta)e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, де $\upsilon(\xi,\eta)$ - нова невідома функція, λ,μ - поки-що невідомі константи. Тоді

$$u_\xi=(\upsilon_\xi+\lambda\upsilon)e^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

$$u_\eta=(\upsilon_\eta+\mu\upsilon)e^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

$$u_{\xi\xi}=(\upsilon_{\xi\xi}+2\lambda\upsilon_\xi+\lambda^2\upsilon)e^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

$$u_{\xi\eta}=(\upsilon_{\xi\eta}+\lambda\upsilon_\eta+\mu\upsilon_\xi+\lambda\mu\upsilon)e^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

$$u_{\eta\eta}=(\upsilon_{\eta\eta}+2\mu\upsilon_\eta+\mu^2\upsilon)e^{\lambda\xi+\mu\eta}.$$

Підставляючи знайдені похідні, наприклад, в рівняння (1.21) і, поділивши на множник $e^{\lambda\xi+\mu\eta}\neq 0$, отримуємо

$$\upsilon_{\xi\xi}+\upsilon_{\eta\eta}+(b_1+2\lambda)\upsilon_\xi+(b_2+2\mu)\upsilon_\eta+(\lambda^2+\mu^2+b_1\lambda+b_2\mu+c)\upsilon+f_1=0.$$

Параметри λ,μ виберемо так, щоб два коефіцієнти при перших похідних перетворились в нуль. Тобто, $\lambda=-b_1/2$, $\mu=-b_2/2$. В результаті отримаємо

$$\upsilon_{\xi\xi}+\upsilon_{\eta\eta}+\gamma\upsilon+f_1=0,$$

де $\gamma=-b_1^2/4-b_2^2/4+c$, $f_1=f\cdot e^{\frac{b_1}{2}\xi+\frac{b_2}{2}\eta}$.

Виконуючи аналогічні дії для рівнянь (1.19) та (1.20), отримуємо наступні канонічні форми ДРЧП другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\upsilon_{\xi\eta}+\gamma\upsilon+f_1=0 \text{ або } \upsilon_{\xi\xi}-\upsilon_{\eta\eta}+\gamma\upsilon+f_1=0 \text{ (гіперболічний тип);}$$

$$\upsilon_{\xi\xi}+b_2\upsilon_\eta+f_1=0 \text{ (параболічний тип);}$$

$$\upsilon_{\xi\xi}+\upsilon_{\eta\eta}+\gamma\upsilon+f_1=0 \text{ (еліптичний тип).}$$

ПРАКТИЧНА РОБОТА №1
Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

Приклад П1.1. Звести рівняння до канонічного вигляду в кожній із областей, де його тип зберігається

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0. \qquad (\text{П}1.1)$$

Розв'язання.

Тут $a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{22} = x \Rightarrow D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0 - x = -x$. Отже, можливі наступні випадки:

1) $D > 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow$ рівняння (П1.1) – це рівняння гіперболічного типу. Характеристичне рівняння має вигляд

$$(dy)^2 + x(dx)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (-x) = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} - \sqrt{-x} = 0 \text{ або } \frac{dy}{dx} + \sqrt{-x} = 0,$$

$$y + \tfrac{2}{3}(-x)^{3/2} = const, \; y - \tfrac{2}{3}(-x)^{3/2} = const.$$

В рівнянні (П1.1) проводимо заміну змінних

$$\xi = y + \tfrac{2}{3}(-x)^{3/2}, \; \eta = y - \tfrac{2}{3}(-x)^{3/2}. \qquad (\text{П}1.2)$$

Тоді

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\left(-(-x)^{1/2}\right)^2 + 2u_{\xi\eta}\left(-(-x)^{1/2}\right)(-x)^{1/2} + u_{\eta\eta}\left((-x)^{1/2}\right)^2 +$$

$$+ u_{\xi}\frac{1}{2}(-x)^{1/2} + u_{\eta}\left(-\frac{1}{2}(-x)^{1/2}\right) = -xu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} -$$

$$- xu_{\eta\eta} + \frac{1}{2}u_{\xi}(-x)^{-1/2} - \frac{1}{2}u_{\eta}(-x)^{-1/2};$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot (1)^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 1 + u_{\eta\eta} \cdot (1)^2 = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні в (П1.1), дістанемо

$$-xu_{\xi\xi}+2xu_{\xi\eta}-xu_{\eta\eta}+\frac{1}{2}u_{\xi}(-x)^{1/2}-\frac{1}{2}u_{\eta}(-x)^{-1/2}+$$

$$+xu_{\xi\xi}+2xu_{\xi\eta}+xu_{\eta\eta}=0,$$

$$4xu_{\xi\eta}+\frac{1}{2}u_{\xi}(-x)^{1/2}-\frac{1}{2}u_{\eta}(-x)^{-1/2}=0,$$

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{8(-x)^{3/2}}\left(u_{\xi}-u_{\eta}\right)=0. \qquad (\text{П}1.3)$$

З (П1.2) маємо

$$\xi-\eta=\frac{4}{3}(-x)^{3/2}\ \Rightarrow(-x)^{3/2}=\frac{3}{4}(\xi-\eta). \qquad (\text{П}1.4)$$

Провівши заміну в (П1.3) згідно (П1.4), отримаємо

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(u_{\xi}-u_{\eta}\right)=0.$$

2) $D<0\Rightarrow -x<0\Rightarrow x>0\Rightarrow$ рівняння (П1.1) – це рівняння еліптичного типу. Характеристичне рівняння має вигляд

$$(dy)^2+x(dx)^2=0,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x=0,$$

$$\frac{dy}{dx}-i\sqrt{x}=0 \text{ або } \frac{dy}{dx}+i\sqrt{x}=0,$$

$$y+{}^{2}\!/_{3}\,ix^{3/2}=const,\ y-{}^{2}\!/_{3}\,ix^{3/2}=const.$$

В рівнянні (П1.1) проводимо заміну змінних

$$\alpha=\frac{\varphi+\varphi^{*}}{2},\ \beta=\frac{\varphi-\varphi^{*}}{2i},$$

де

$$\varphi = y + \frac{2}{3} i x^{3/2}, \varphi^* = y - \frac{2}{3} i x^{3/2}.$$

Тоді

$$\alpha = y, \ \beta = \frac{2}{3} x^{3/2};$$

$$u_{xx} = u_{\alpha\alpha} \cdot 0 + 2u_{\alpha\beta} \cdot 0 + u_{\beta\beta}\left(x^{1/2}\right)^2 + u_\alpha \cdot 0 + u_\beta \frac{1}{2} x^{-1/2} = x u_{\beta\beta} + \frac{1}{2} u_\beta x^{-1/2};$$

$$u_{yy} = u_{\alpha\alpha}.$$

З (П1.1) отримаємо

$$u_{\beta\beta} + \frac{1}{2} u_\beta x^{-1/2} + x u_{\alpha\alpha} = 0,$$

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{1}{2x^{3/2}} u_\beta = 0. \qquad \text{(П1.5)}$$

Оскільки $x^{3/2} = \frac{3}{2}\beta$, то з (1.8) дістанемо

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{1}{3\beta} u_\beta = 0.$$

3) $D = 0 \Rightarrow x = 0$ і рівняння (П1.1) вироджується в рівняння $u_{xx} = 0$.

Відповідь:

1) x<0:

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}\left(u_\xi - u_\eta\right) = 0, \ \xi = y + 2/3\,(-x)^{3/2}, \ \eta = y + 2/3\,(-x)^{3/2}.$$

2) x>0:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{1}{3\beta^{3/2}} u_\beta = 0, \ \alpha = y, \ \beta = \frac{2}{3} x^{3/2}.$$

Завдання для самостійної роботи

І рівень

Звести рівняння до канонічного вигляду.

1. $y^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$.

2. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$.

3. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} - 2xu_x = 0$.

4. $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2u_x = 0$.

5. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - 2yu_x + ye^{y/x} = 0$.

II рівень

Звести рівняння до канонічного вигляду в кожній із областей, де його тип зберігається.

1. $u_{xx} - xu_{yy} = 0$.
2. $u_{xx} + yu_{yy} = 0$.
3. $(1+x^2)^2u_{xx} + u_{yy} + 2x(1+x^2)u_x = 0$.
4. $u_{xx} - (1+y^2)^2u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0$.
5. $u_{xx} - 2\sin x \cdot u_{xy} - \cos^2 x \cdot u_{yy} - \cos x \cdot u_y = 0.$

ПРАКТИЧНА РОБОТА №2
Зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами

<u>Приклад П2. 1</u>. Звести наступне диференціальне рівняння з частинними похідними до канонічного вигляду

$$2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0. \qquad (П2.1)$$

<u>Розв'язання.</u> Тут $D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = -1 < 0$, $a_{11} = 2, a_{12} = 1, a_{22} = 1$. Отже, рівняння (П2.1) – це рівняння еліптичного типу. Характеристичне рівняння має наступний вигляд:

$$2(dy)^2 - 2dxdy + (dx)^2 = 0,$$

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Отже,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+i}{2} \qquad \text{або} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1-i}{2}.$$

Розв'язавши вищевказані звичайні диференціальні рівняння, отримаємо рівняння першої характеристики

$$2y - (1+i)x = const,$$

та рівняння другої характеристики

$$2y - (1-i)x = const.$$

Щоб отримати рівняння з дійсними коефіцієнтами проведемо наступну заміну змінних

$$\alpha = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2}, \ \beta = \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2},$$

де $\varphi = 2y - (1+i)x$, $\bar{\varphi} = 2y - (1-i)x$. Тоді

$$\alpha = 2y - x, \ \ \beta = -x.$$

Проводимо заміну похідних:

$$u_x = u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x = -u_\alpha - u_\beta;$$

$$u_y = u_\alpha \alpha_y + u_\beta \beta_y = 2u_\alpha;$$

$$u_{xx} = u_{\alpha\alpha}\alpha_x^2 + 2u_{\alpha\beta}\alpha_x\beta_x + u_{\beta\beta}\beta_x^2 + u_\alpha \alpha_{xx} + u_\beta \beta_{xx} = u_{aa} + 2u_{a\beta} + u_{\beta\beta};$$

$$u_{yy} = u_{\alpha\alpha}\alpha_y^2 + 2u_{\alpha\beta}\alpha_y\beta_y + u_{\beta\beta}\beta_y^2 + u_\alpha \alpha_{yy} + u_\beta \beta_{yy} = u_{aa};$$

$$u_{xy} = u_{\alpha\alpha}\alpha_x\alpha_y + (\alpha_x\beta_y + \beta_x\alpha_y)u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}\beta_x\beta_y + u_a a_{xy} + u_\beta \beta_{xy} = -2u_{aa} - 2u_{a\beta}.$$

Підставивши знайдені похідні в (П2.1), отримаємо:

$$2(u_{\alpha\alpha} + 2u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}) - 2(-2u_{\alpha\alpha} - 2u_{\alpha\beta}) - 4u_{\alpha\alpha} + 4(-u_a - u_\beta) + 8u_\beta + u = 0,$$

$$2u_{\alpha\alpha} + 2u_{\beta\beta} + 4u_\alpha - 4u_\beta + u = 0,$$

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + 2u_\alpha - 2u_\beta + \frac{1}{2}u = 0. \qquad \text{(П2.2)}$$

Для подальшого спрощення введемо заміну

$$u(\alpha,\beta) = v(\alpha,\beta)e^{\lambda\alpha + \mu\beta},$$

де $v(\alpha,\beta)$ - нова невідома функція;

λ, μ - сталі, які потрібно знайти.

Тоді

$$u_\alpha = (v_\alpha + \lambda v)e^{\lambda\alpha+\mu\beta};$$

$$u_\beta = (v_\beta + \mu v)e^{\lambda\alpha+\mu\beta};$$

$$u_{\alpha\alpha} = (v_{\alpha\alpha} + 2\lambda v_\alpha + \lambda^2 v)e^{\lambda\alpha+\mu\beta};$$

$$u_{\beta\beta} = (v_{\beta\beta} + 2\mu v_{\beta\beta} + \mu^2 v)e^{\lambda\alpha+\mu\beta}.$$

Проводячи заміну, з рівняння (П2.2) дістанемо

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + (2\lambda + 2)v_\alpha + (2\mu + 2)v_\beta + (\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda - 2\mu + \frac{1}{2})v = 0.$$

(П2.3)

Виберемо λ та μ з умови рівності нулю коефіцієнтів при v_x та v_y. Маємо

$$\begin{cases} 2\lambda + 2 = 0, \\ 2\mu - 2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1, \\ \mu = 1. \end{cases}$$

При знайдених λ та μ з (П2.3) отримаємо

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} - \frac{3}{2} v = 0 .$$

<u>Відповідь:</u> $v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} - \frac{3}{2} v = 0$,

де $u(\alpha,\beta) = v(\alpha,\beta)e^{-\alpha+\beta}$, $\alpha = 2y - x$, $\beta = -x$.

<u>Завдання для самостійної роботи</u>

I рівень

Звести рівняння до канонічного вигляду.

1. $u_{xx} + 5u_{xy} + 4u_{yy} = 0$.
2. $u_{xx} - 6u_{xy} + 13u_{yy} = 0$.
3. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$.
4. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 44 = 0$.
5. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0$.

II рівень

Звести рівняння до канонічного вигляду.

1. $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0$.
2. $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y + \sin(x + y) = 0$.
3. $au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0$, a,b,c – const.
4. $au_{xx} + 4au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + 4 = 0$, a,b,c – const.

Розділ 2
Рівняння гіперболічного типу

<u>ТЕМА 2.</u> Хвильове рівняння та постановки крайових задач

§2.1. Рівняння коливань струни

До рівнянь гіперболічного типу приводять процеси коливань [2, 4, 6, 7, 11, 18, 34, 36, 39, 45, 49]. Наприклад, коливання струни, мембрани, газу, електромагнітні коливання. Характерною особливістю даних фізичних процесів є скінченна швидкість їх поширення.

Описання процесу коливання струни можна провести за допомогою задання положення точок струни в різні моменти часу. Для визначення положення струни в момент часу t достатньо задати положення вектора зміщення $\vec{u}(x,t)=(u_1(x,t);u_2(x,t);u_3(x,t))$ для будь-якої точки струни x.

Зробимо наступні припущення:

1. Коливання здійснюються в одній площині xOu і вектор зміщення є перпендикулярним до осі Ox в довільний момент часу $t \geq 0$. Тоді процес коливання можна описати однією функцією $u(x,t)$, яка характеризує вертикальне зміщення точок струни.
2. Струна є абсолютно гнучкою, тобто сила натягу $\vec{T}$ значно перевищує силу опору струни $\vec{R}$. Тому надалі вважаємо, що $\left|\vec{R}\right| \approx 0$.
3. Струна абсолютно пружна, тобто виконується закон Гука – сила натягу прямо пропорційна видовженню.
4. Сили опору навколишнього середовища відсутні і коливання струни малі, тобто $\alpha^2(x,t) \approx 0$, де $\alpha(x,t)$ - гострий кут між дотичною до струни в точці x в момент часу t та віссю Ox (див. рис. 2.1).

Враховуючи припущення 4, з розкладу $\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots$ випливає, що $\sin\alpha \approx \alpha$. Тоді $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$, тобто $\cos\alpha \approx 1$. Також $tg\alpha - \sin\alpha = tg\alpha \cdot (1 - \frac{\sin\alpha}{tg\alpha}) = tg\alpha \cdot (1 - \cos\alpha) \approx 0$. Звідси $\sin\alpha \approx tg\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$ і $tg^2\alpha \approx \sin^2\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \alpha^2 \approx 0$.

Розглянемо частину струни між точками $M_1(x_1)$ та $M_2(x_2)$ (див. рис.2.1). Тоді $L_{M_1M_2} = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1$. Отже, довжина струни в процесі коливань не змінюється. Тоді в силу припущень 2-4 сила натягу $\vec{T}$ не залежить від часу.

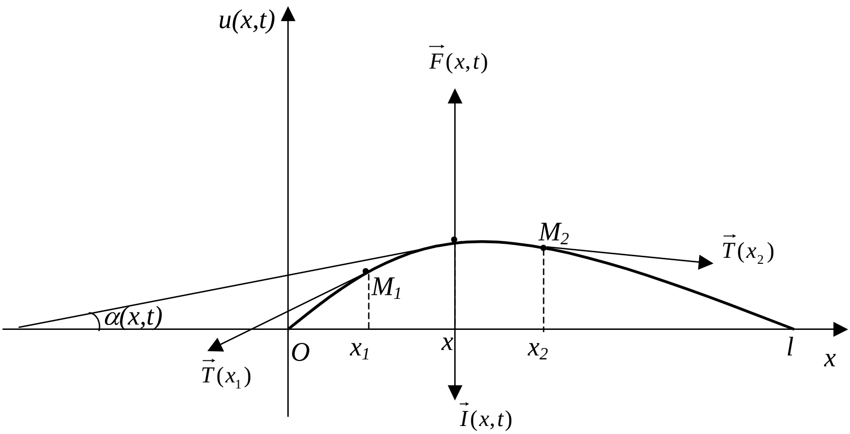

Рис. 2.1. Коливання струни

Нехай $\vec{F}(x,t)$ - зовнішня сила, паралельна осі Ou, рівномірно розподілена вздовж струни і розрахована на одиницю довжини; $\vec{I}(x,t)$ - сила інерції. Згідно принципу Д'Аламбера сума проекцій всіх сил, що діють на проміжок струни (x_1, x_2), на відповідну координатну вісь, рівна нулю. Маємо

$$\Pi_x \vec{F} = 0,\ \Pi_x \vec{I} = 0,\ \Pi_x \vec{T}(x_1) = -T(x_1)\cos\alpha(x_1,t) \approx -T(x_1),$$
$$\Pi_x \vec{T}(x_2) = T(x_2)\cos\alpha(x_2,t) \approx T(x_2).$$
Отже,
$$T(x_2) - T(x_1) = 0,$$
$$T(x_2) = T(x_1).$$
В силу довільності точок x_1 та x_2 випливає, що $T(x) = T = const$.

Визначимо суму проекцій всіх сил, які діють на проміжок струни $(x_1; x_2)$, на вісь Ou і за принципом Д'Аламбера прирівняємо до нуля. Проекція сили натягу в точці x_2 визначиться наступним чином: $T\sin\alpha(x)\big|_{x=x_2} = T\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2}$. Аналогічно, в точці x_1: $-T\sin\alpha(x)\big|_{x=x_1} = -T\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1}$. Взявши до уваги зовнішні сили $\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,t)dx$, що діють на проміжок (x_1, x_2) та сили інерції $-\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$, де ρ - лінійна густина струни, маємо
$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(F(x,t) - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx + T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} - T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} = 0,$$
$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(F(x,t) - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx = 0,$$
$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(F(x,t) - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx = 0.$$
В силу довільності точок x_1 та x_2 з останньої рівності дістанемо
$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{2.1}$$
де $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$; $f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{\rho}$ - інтенсивність зовнішніх сил.

Поперечні коливання мембрани, яка в площині xOy займає область D, описуються рівнянням

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \tag{2.2}$$

де функція $u(x, y, t)$ характеризує положення точок мембрани в різні моменти часу t.

У випадку тривимірного простору хвильове рівняння набуває вигляду

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t) \tag{2.3}$$

або

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t). \tag{2.4}$$

До рівняння (2.4) приводять задачі про розповсюдження звуку в однорідному середовищі та електромагнітних хвиль в однорідному непровідному середовищі [36, 49].

§2.2. Граничні та початкові умови. Їх фізична інтерпретація

Оскільки диференціальне рівняння з частинними похідними має нескінченну кількість розв'язків (порівняйте зі звичайними диференціальними рівняннями [25, 40, 46]), то, для однозначної характеристики фізичного процесу, до ДРЧП потрібно приєднати деякі додаткові умови, які називаються ***крайовими***.

Крайові умови поділяються на:

1. ***Початкові умови*** - характеризують початковий стан процесу. Для рівняння (2.4) вони мають вигляд

$$u(x, y, z, t)\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \left.\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y, z), \tag{2.5}$$

де $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ - задані функції. Умови (2.5) задаються в усій області D розв'язку рівняння (2.4). Перша з умов (2.5) задає початкове відхилення, а друга – початкову швидкість.

2. ***Граничні умови*** – задаються на межі S області D розв'язку рівняння (2.4). Для рівнянь математичної фізики є наступні основні типи граничних умов:

$u\big|_S = \mu(x, y, z, t), (x, y, z) \in S$ (гранична умова першого роду); (2.6)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \nu(x,y,z,t),(x,y,z)\in S$$ (гранична умова другого роду); (2.7)

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+h(x,y,z,t)u\right)\right|_S = \beta(x,y,z,t),(x,y,z)\in S$$ (гранична умова третього роду). (2.8)

В умовах (2.6)-(2.8) $\mu(x,y,z,t), \nu(x,y,z,t), h(x,y,z,t), \beta(x,y,z,t)$ - задані функції; $\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot n^{(x)}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot n^{(y)}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot n^{(z)}$ - оператор похідної по зовнішній нормалі до межі S області D; $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ – складові вектора напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі S області D.

Розглянемо коливання скінченної струни в області $0\le x\le l$. Якщо кінці струни рухаються за певними законами $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, тоді на даних кінцях струни для функції $u(x,t)$ задаються граничні умови першого роду

$$u\big|_{x=0}=\mu_1(t),\ u\big|_{x=l}=\mu_2(t). \tag{2.9}$$

У випадку $\mu_1(t)=\mu_2(t)\equiv 0$ кінці струни є нерухомими.

Якщо задано закон зміни сили, прикладеної до кінців струни, яка діє в напрямку коливань, то для функції $u(x,t)$ задаються граничні умови другого роду

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\upsilon_1(t),\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\upsilon_2(t). \tag{2.10}$$

Якщо $\upsilon_1(t)=\upsilon_2(t)\equiv 0$, тоді кінці струни здійснюють вільні коливання.

Нехай до кінців струни прикріплені пружини, які рухаються за власними законами $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$. Тоді на кінцях струни для функції $u(x,t)$ задаються граничні умови третього роду

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}-h(u-\gamma_1(t)\right)\right|_{x=0}=0,\ \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+h(u-\gamma_2(t)\right)\right|_{x=l}=0, \tag{2.11}$$

де $h=\frac{\alpha}{E}$; E - модуль Юнга; α - коефіцієнт жорсткості.

§2.3. Класифікація крайових задач

> Сукупність диференціального рівняння з частинними похідними та крайових умов становить математичне формулювання фізичної задачі і називається ***крайовою задачею математичної фізики.***

Як ми побачили в §2.1, процес коливання струни залежить від часу. ДРЧП, в яких шукана функція залежить від часу називаються ***нестаціонарними***. Але досить багато рівнянь математичної фізики описують процеси, які не залежать від часу. Такі рівняння називаються ***стаціонарними***.

Зрозуміло, що для стаціонарних ДРЧП крайові умови складаються лише з граничних умов, адже початкові умови для таких ДРЧП втрачають зміст. Основні крайові задачі математичної фізики для стаціонарних ДРЧП поділяються на:

1. ДРЧП + граничні умови першого роду = перша крайова задача;
2. ДРЧП + граничні умови другого роду = друга крайова задача;
3. ДРЧП + граничні умови третього роду = третя крайова задача.

До нестаціонарних ДРЧП, окрім граничних умов потрібно приєднувати ще й початкові умови. Крайові задачі, в яких є початкові та граничні умови називаються ***мішаними***. Тобто, для нестаціонарних диференціальних рівнянь з частинними похідними маємо наступну класифікацію основних крайових задач:

1. ДРЧП + початкові умови + граничні умови першого роду = перша мішана крайова задача. Область визначення шуканої функції обмежена;
2. ДРЧП + початкові умови + граничні умови другого роду = друга мішана крайова задача. Область визначення шуканої функції обмежена;
3. ДРЧП + початкові умови + граничні умови третього роду = третя мішана крайова задача. Область визначення шуканої функції необмежена;
4. ДРЧП + початкові умови = задача Коші. Область визначення шуканої функції весь простір R^n.

Звернемо увагу на задачу Коші. Оскільки невідома функція шукається у всьому просторі, то до ДРЧП приєднуються лише початкові умови.

§2.4. Поняття про коректність постановки крайової задачі

При розв'язуванні крайових задач

1. Потрібно впевнитись, що додаткові умови є достатніми для виділення однозначного розв'язку. Це здійснюється доведенням теореми єдиності розв'язку.
2. Потрібно впевнитись, що серед додаткових умов немає суперечливих. Це здійснюється доведенням теореми про існування розв'язку.

Відразу звернемо увагу на другий пункт і відмітимо, що для мішаних крайових задач він включає умову узгодженості початкових та граничних умов. Тобто, на межі області розв'язку задачі початкові умови мають дорівнювати граничним умовам, обчисленим в початковий момент часу.

Будь-який фізичний процес, який неперервно розвивається в часі повинен характеризуватись функціями, які неперервно залежать від додаткових даних задачі. Якщо це не виконується, то два фізично різні процеси можуть характеризуватись практично однаковими додатковими даними. Це приводить до поняття стійкості крайової задачі.

> Крайова задача називається ***стійкою***, якщо її розв'язок неперервно залежить від додаткових даних задачі (початкових та граничних умов, а також від інтенсивності зовнішніх сил f).

> Крайова задача називається ***коректною***, якщо
> 1) її розв'язок існує;
> 2) він єдиний;
> 3) він стійкий.

Дослідження питань коректності крайових задач здійснюється в рамках так званої якісної теорії рівнянь математичної фізики.

§2.5. Некоректні задачі математичної фізики

Вперше поняття коректно поставлених та некоректно поставлених задач ввів Жак Адамар [1, 52]. Виконання умов коректності здавалось настільки природним для „розумної" математичної задачі, що Адамар висловив думку про нефізичність будь-якої некоректної задачі, тобто задачі, яка не задовольняє всім вимогам 1)-3). Йому ж належить класичний приклад некоректної задачі – задача Коші для рівняння Лапласа. Але як потім виявилось, необхідність розв'язання саме цієї задачі виникає в самих різноманітних областях математики та природничих наук в цілому. Так, до розв'язання задачі Коші для рівняння Лапласа зводиться проблема продовження аналітичних функцій, ряд геофізичних задач, задачі обтікання тіл надзвуковим потоком та ін. Задача Коші для рівняння Лапласа стала модельною в багатьох наукових дослідженнях [19]. Вона полягає у відшуканні функції $u(x,t)$, яка є розв'язком рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

і задовольняє початковим умовам

$$u(x,0)=\psi(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi(x),\ \ -\infty<x<\infty,$$

де $\psi(x),\varphi(x)$ - задані функції.

Якщо покласти $\psi(x)=\psi_1(x)\equiv 0$ і $\varphi(x)=\varphi_1(x)=\dfrac{1}{a}\sin a$ $(a>0)$, то розв'язком вищенаведеної задачі буде функція $u_1(x,t)=\dfrac{1}{a^2}\sin ax\cdot shat$.

Якщо покласти $\psi(x)=\psi_2(x)\equiv 0$ і $\varphi(x)=\varphi_2(x)\equiv 0$, то розв'язком такої задачі Коші буде функція $u_2(x,t)\equiv 0$.

Дослідимо відхилення початкових даних та розв'язків в метриці C. Маємо

$$\sup_x|\psi_1(x)-\psi_2(x)|=0,\quad \sup_x|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|=\frac{1}{a}.$$

Остання величина при достатньо великих значеннях a може бути зроблена як завгодно малою. Однак, відхилення розв'язків $\sup_x|u_1(x,t)-u_2(x,t)|=\sup_x\left|\dfrac{1}{a^2}\sin ax\cdot shat\right|=\dfrac{sh\,at}{a^2}$ може бути як завгодно великим навіть при досить великих значеннях числа a. Таким чином, дана задача не володіє властивістю стійкості і, відповідно, є некоректною.

З елементами теорії некоректних задач математичної фізики та методами їх розв'язання можна ознайомитись, наприклад в [30, 48].

§2.6. Редукція загальної задачі

При розв'язуванні складної задачі природно прагнути звести її до розв'язування більш простих задач (редуціювати загальну задачу).

Так, розв'язок $u(x,t)$ загальної крайової задачі для лінійного рівняння гіперболічного типу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ x \in (0,l),\ t > 0,$$
$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$$

можна подати у вигляді суми

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_4(x,t),$$

де $u_1(x,t),\ u_2(x,t),\ u_3(x,t),\ u_4(x,t)$ - розв'язки наступних простіших крайових задач [49]:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2},\ i = 1,2,3$$

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial^2 t^2} + a^2 \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + f(x,t),\ (x \in (0;l), t > 0)$$

$$\begin{array}{llll} u_1(0,t) = 0, & u_2(0,t) = \mu_1(t), & u_3(0,t) = 0, & u_4(0,t) = 0, \\ u_1(l,t) = 0, & u_2(l,t) = 0, & u_3(l,t) = \mu_2(t), & u_4(l,t) = 0, \\ u_1(x,0) = \varphi(x), & u_2(x,0) = 0, & u_3(x,0) = 0, & u_4(x,0) = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), & \frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, & \frac{\partial u_3}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, & \frac{\partial u_4}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{array}$$

Простою перевіркою легко переконатись, що функція $u(x,t) = \sum_{i=1}^{4} u_i(x,t)$ буде задовольняти рівняння та крайові умови загальної задачі. Спрощення полягає в тому, що в перших трьох задачах рівняння є однорідними і деякі з крайових умов теж однорідні, а в четвертій задачі хоча рівняння є неоднорідним, але всі крайові умови однорідні. Однак „платою" за таке спрощення є збільшення кількості задач, які потрібно розв'язати. Надалі ми досить часто будемо використовувати редукцію загальної задачі для знаходження її розв'язку.

ТЕМА 3. Задача Коші для хвильового рівняння

§3.1. Метод характеристик. Формула Д'Аламбера

Розглянемо задачу Коші для одновимірного однорідного хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x \in (-\infty; +\infty), \tag{3.2}$$

де $\psi(x) \in C^1(-\infty;+\infty)$, $\varphi(x) \in C^2(-\infty;+\infty)$.

Зауважимо, що C^n – це клас неперервних функцій, які мають неперервні похідні до n*-го* порядку включно.

Зведемо рівняння (3.1) до канонічного вигляду, який містить мішану похідну. Характеристичне рівняння

$$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$$

розпадається на два рівняння

$$dx + adt = 0,$$

$$dx - adt = 0,$$

загальними інтегралами яких є

$$x + at = C_1, \;\; x - at = C_2, \tag{3.3}$$

де $C_1 = const$, $C_2 = const$.

Ввівши нові змінні $\xi = x + at$, $\eta = x - at$, отримаємо (див. формули (1.3))

$$u_x = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_t = au_\xi - au_\eta,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{tt} = a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (3.1) та звівши подібні доданки, дістанемо наступне рівняння:

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{3.4}$$

Інтегруючи (3.4) по ξ, маємо

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta), \tag{3.5}$$

де $f(\eta)$ – довільна функція. Інтегруючи (3.5) по η, отримаємо

$$u(\xi,\eta)=\int f(\eta)d\eta+f_1(\xi)$$

або $u(\xi,\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta)$, (3.6)

де $f_1(\xi)$ та $f_2(\eta)$ – довільні функції. Повертаючись до змінних x, t з (3.6) одержимо

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)\,. \tag{3.7}$$

Визначимо функції f_1 та f_2 з початкових умов (3.2). Отримуємо

$$u(x,0)=f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x)\,, \tag{3.8}$$

$$u_t(x,0)=af_1'(x)-af_2'(x)=\psi(x)\,. \tag{3.9}$$

Інтегруючи (3.9), маємо

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz+C\,, \tag{3.10}$$

де C - довільна константа. Додавши рівності (3.8) та (3.10) і віднявши рівність (3.10) від (3.8), знаходимо

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz+\frac{C}{2}\,.$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz-\frac{C}{2}\,.$$

Підставимо знайдені функції f_1 та f_2 в (3.7). В результаті отримаємо формулу Д'Аламбера

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz\,, \tag{3.11}$$

адже

$$\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(z)dz-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\psi(z)dz=\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(z)dz+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x_0}\psi(z)dz=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz\,.$$

Розглянемо задачу Коші для неоднорідного хвильового рівняння

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)\,, \tag{3.12}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in(-\infty;+\infty), \qquad (3,13)$$

де $f(x,t)=C(x\in(-\infty;+\infty),t>0)$, $\varphi(x)\in C^2(-\infty;+\infty),\psi(x)\in C^1(-\infty;+\infty)$.

Згідно з принципом редукції загальної задачі (див. §2.6) розв'язок задачі Коші (3.12), (3.13) шукаємо у вигляді

$$u(x,y) = z(x,t) + v(x,t)\,, \tag{3.14}$$

де $z(x,t)$ - розв'язок задачі Коші (3.1), (3.2), а $v(x,t)$ знаходимо як розв'язок крайової задачі

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t)\,, \tag{3.15}$$

$$v(x,0) = 0, v_t(x,0) = 0\,. \tag{3.16}$$

Покажемо, що

$$v(x,t) = \int_0^t \omega(x,t-\tau)d\tau\,, \tag{3.17}$$

де функція $\omega(x,t-\tau)$ є розв'язком задачі Коші

$$\omega_{tt}(x,t-\tau) = a^2\omega_{xx}(x,t-\tau)\,, \tag{3.18}$$

$$\omega(x,0) = 0, \omega_t(x,0) = f(x,\tau), t > \tau, x \in (-\infty;+\infty)\,. \tag{3.19}$$

Продиференціювавши (3.17), одержимо

$$v_t(x,t) = \omega(x,0) + \int_0^t \omega_t(x,t-\tau)d\tau.$$

Аналогічно

$$v_{tt}(x,y) = \omega_t(x,0) + \int_0^t \omega_{tt}(x,t-\tau)d\tau,$$

або, з урахуванням другої з умов (3.19),

$$v_{tt}(x,t) = f(x,t) + \int_0^t \omega_{tt}(x,t-\tau)d\tau,$$

а також

$$v_{xx}(x,t) = \int_0^t \omega_{xx}(x,t-\tau)d\tau.$$

Обґрунтування отриманих похідних функції (3.17) наведемо пізніше (див. формулу (3.23)). Підставляючи вищеотримані вирази для похідних в (3.15), маємо

$$f(x,t) + \int_0^t \omega_{tt}(x,t-\tau)d\tau = a^2\int_0^t \omega_{xx}(x,t-\tau)d\tau + f(x,t),$$

$$0 \equiv 0\,,$$

і $v(x,0)=0, v_t(x,0)=\omega(x,0)=0$. Тобто, функція (3.17) є розв'язком задачі Коші (3.15), (3.16).

Формула Д'Аламбера (3.11) для задачі (3.18), (3.19) дає

$$\omega(x,t-\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t+\tau)} f(z,\tau)d\tau . \qquad (3.20)$$

Підставивши (3.20) в (3.17), а (3.17) в (3.14) дістанемо загальний розв'язок задачі Коші (3.12), (3.13) у вигляді

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dzd\tau . \qquad (3.21)$$

Вищенаведений принцип побудови розв'язку задачі Коші (3.12), (3.13) називається принципом Дюгамеля.

Зауваження 3.1. Розглянемо інтеграл

$$I(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx . \qquad (3.22)$$

Теорема 3.1. *Нехай функція $f(x,y)$ визначена і неперервна в прямокутнику $[a,b;c,d]$, а криві $x=\alpha(y), x=\beta(y)$ $(c\le y\le d)$ неперервні і не виходять за його межі. Крім того функція $f(x,y)$ допускає в даному прямокутнику неперервну похідну $f_y(x,y)$, а також існують похідні $\alpha'(y),\beta'(y)$. Тоді*

$$I'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x,y)dx+\beta'(y)\cdot f(\beta(y),y)-\alpha'(y)\cdot f(\alpha(y),y). \qquad (3.23)$$

Доведення. Очевидно, що якщо $I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$, де $a=const$, $b=const$, то

$$I'(y)=\int_a^b f_y(x,y)dx . \qquad (3.24)$$

Інтеграл (3.22) запишемо у вигляді

$$I(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx+\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx-\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx , \qquad (3.25)$$

де y_0 - деяка фіксована точка. Перший інтеграл в (3.25) при $y = y_0$ має похідну, яка визначається формулою (3.24)

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f_y(x, y_0)dx .$$

Для другого інтеграла за теоремою про середнє отримаємо

$$\frac{1}{y - y_0} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)dx = \frac{\beta(y) - \beta(y_0)}{y - y_0} \cdot f(\bar{x}, y),$$

де $\bar{x}$ міститься між $\beta(y_0)$ та $\beta(y)$. Тоді

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)dx)\Big|_{y=y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)dx}{y - y_0} =$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{\beta(y) - \beta(y_0)}{y - y_0} \cdot f(\bar{x}, y) = \beta'(y_0) f(\beta(y_0), y_0).$$

Аналогічно, для похідної третього інтеграла при $y = y_0$ отримаємо $-\alpha'(y_0) \cdot f(\alpha(y_0), y_0)$. Об'єднуючи ці результати, переконуємось, що похідна $I'(y_0)$ дається формулою (3.23) (детальніше див. [50, гл.14, §1, 507, 509]).

§3.2. Формули Пуассона та Кірхгофа

Розглянемо задачу Коші для двовимірного неоднорідного хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \tag{3.26}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),\ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \tag{3.27}$$

$(x, y) \in E_2 = \{(x, y) \mid -\infty < x, y < +\infty\}$, $\varphi(x, y) \in C^3(E_2)$, $\psi(x, y) \in C^2(E_2)$, $f(x, y, t) \in C^2(t > 0, (x, y) \in E_2)$.

Розв'язок задачі (3.26), (3.27) дається наступною формулою:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{K_{at}(x,y)}\frac{\varphi(\alpha,\beta)d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{K_{at}(x,y)}\frac{\psi(\alpha,\beta)d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}+ \qquad (3.28)$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t\iint\limits_{K_{a(t-\tau)}(x,y)}\frac{f(\alpha,\beta,\tau)d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}d\tau,$$

де $K_{at}(x,y)$ – круг радіуса at з центром в точці (x,y)

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2\le(at)^2.$$

При $f(x,y,t)\equiv 0$ формула (3.28) називається формулою Пуассона.

Розв’язок задачі Коші для неоднорідного хвильового рівняння в тривимірному просторі

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z,t),$$
$$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y),\ u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y),$$

де $(x,y,z)\in E_3=\{(x,y,z)\,|\,-\infty<x,y,z<+\infty\}$, $\varphi(x,y,z)\in C^3(E_3)$, $\psi(x,y,z)\in C^2(E_3)$, $f(x,y,t)\in C^2(t>0,(x,y)\in E_2)$, можна знайти за формулою

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}(x,y,z)}\frac{\varphi(\alpha,\beta,\gamma)}{at}dS+\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}(x,y)}\frac{\psi(\alpha,\beta,\gamma)}{at}dS+$$

$$+\frac{1}{4\pi a}\iiint\limits_{D_{at}(x,y,z)}\frac{f(t-\tau,\alpha,\beta,\gamma)}{\rho}d\alpha d\beta d\gamma, \qquad (3.29)$$

де $S_{at}(x,y,z)$ – сфера радіуса at з центром в точці (x,y,z)

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2=(at)^2,$$

(α,β,γ) – змінна точка на сфері; $D_{at}(x,y,z)$ – куля радіуса at з центром в точці (x,y,z)

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 \le (at)^2;$$
$$\rho = \sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}.$$

При $f(x,y,z,t) \equiv 0$ формула (3.29) називається формулою Кірхгофа.

Виведення формул (3.28) та (3.29) є досить громіздким і ми не будемо на ньому зупинятись. З деталями виведень можна ознайомитись, наприклад, в [34].

§3.3. Коректність постановки задачі Коші

Теорема 3.2. *Розв'язок задачі Коші (3.12), (3.13) існує та єдиний в класі функцій* $C^2(\Omega)$, $\Omega = \{(x,t) \mid x \in (-\infty;+\infty), t > 0\}$.

Доведення. Функція, визначена формулою (3.21) задовольняє рівняння (3.12) та початкові умови (3.13). Отже, принаймні один розв'язок задачі Коші (3.12), (3.13) існує. Припустимо, що таких розв'язків є два: $u_1(x,t)$ та $u_2(x,t)$. Тобто,

$$(u_1)_{tt} = a^2 (u_1)_{xx} + f(x,t), \qquad (3.30)$$
$$u_1(x,0) = \varphi(x),\ (u_1)_t(x,0) = \psi(x), \qquad (3.31)$$
$$(u_2)_{tt} = a^2 (u_2)_{xx} + f(x,t), \qquad (3.32)$$
$$u_2(x,0) = \varphi(x),\ (u_2)_t(x,0) = \psi(x). \qquad (3.33)$$

Віднімемо почленно рівняння (3.30) і (3.32), а також початкові умови (3.31) та (3.33). Одержимо, що функція $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ є розв'язком крайової задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad (3.34)$$
$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0. \qquad (3.35)$$

Є очевидною тотожність

$$-2\frac{\partial u}{\partial t}\cdot(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})=-2a^2\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t})+a^2\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial x})^2+\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t})^2=0. \quad (3.36)$$

Для виведення (3.36) потрібно використати рівність $u_{tt}=a^2u_{xx}$. Інтегруючи (3.36) по трикутній області з вершинами в точках $A(x-at;0)$, $B(x+at;0)$, $C(x;t)$ (див. рис.3.1) та використовуючи формулу Остроградського-Гаусса (див., наприклад, [7, ст.248]), отримаємо

$$\iint\limits_{ABC}(-2a^2\frac{\partial}{\partial\xi}(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\tau})+a^2\frac{\partial}{\partial\tau}(\frac{\partial u}{\partial\xi})^2+\frac{\partial}{\partial\tau}(\frac{\partial u}{\partial\tau})^2)d\xi d\tau=$$
$$=\int\limits_{AB+BC+CA}[-2a^2\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\tau}d\tau+a^2(\frac{\partial u}{\partial\xi})^2d\xi+(\frac{\partial u}{\partial\tau})^2d\xi]=0. \quad (3.37)$$

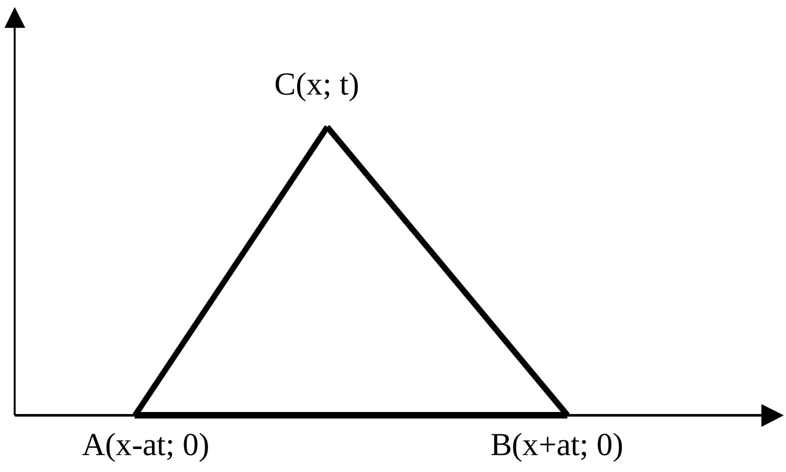

Рис.3.1. Область інтегрування

Вздовж AB, в силу умов (3.35), маємо $\frac{\partial u}{\partial\xi}=0,\frac{\partial u}{\partial\tau}=0.$ Оскільки рівняння BC та CA мають вигляд $\xi=-a\tau+x+at,\xi=a\tau+x-at$, то вздовж цих відрізків $d\xi = -ad\tau, d\xi = ad\tau$ відповідно. Тому (3.37) набуде вигляду

$$\int_{CA} (a\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau})^2 d\tau - \int_{BC} (a\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau})^2 d\tau = 0$$

або

$$\int_0^t (a\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau})^2 d\tau + \int_0^t (a\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau})^2 d\tau = 0,$$

звідки випливає, що $a\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$ на BC і $a\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$ на AC. Тобто, в точці $C(x,t)$ трикутника ABC мають місце рівності

$$\begin{cases} a\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Оскільки точка $C(x,t)$ вибрана довільно, то рівності $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ виконуються скрізь на площині змінних x,t. Це означає, що $u(x,t) = const$. Але, згідно початкових умов (3.35) $u(x,0) = 0$. Отже, $u(x,t) \equiv 0$ в будь-якій точці (x,t), тобто, $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ і єдиність доведена.

Теорема 3.2 доведена.

Доведемо стійкість розв'язку задачі (3.1), (3.2).

Теорема 3.3*. Яким би не був проміжок часу $[0,t_0]$ і яка б не була точність $\varepsilon > 0$, знайдеться таке $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, що для всіх ε розв'язки рівняння (3.1) $u_1(x,t)$ та $u_2(x,t)$ на протязі часу t_0 будуть відрізнятись між собою менше ніж на ε*

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon, \tag{3.38}$$

якщо тільки початкові умови $u_1(x,0)=\varphi_1(x)$, $\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_1(x)$,

$u_2(x,0)=\varphi_2(x)$, $\left.\dfrac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_2(x)$ *відрізняються менше ніж на* δ

$$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|<\delta,\ |\psi_1(x)-\psi_2(x)|<\delta.$$

Доведення. Функції $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ пов'язані з початковими умовами формулою Д'Аламбера. Тоді

$$\left|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right|\le\frac{\left|\varphi_1(x+at)-\varphi_2(x+at)\right|}{2}+\frac{\left|\varphi_1(x-at)-\varphi_2(x-at)\right|}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\left|\psi_1(z)-\psi_2(z)\right|dz<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\delta dz=$$

$$=\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2a}\delta 2at\le\delta+\delta t_0=\delta(1+t_0).$$

Отже, дана нерівність доводить твердження нашої теореми, якщо покласти

$$\delta=\frac{\varepsilon}{1+t_0}.$$

Теорема 3.3 доведена.

Вищенаведені теореми доводять коректність задачі Коші для рівняння гіперболічного типу.

§3.4. Узагальнений розв'язок задачі Коші

Формула Д'Аламбера (3.11) дає розв'язок задачі Коші (3.1), (3.2) в припущенні, що $\varphi(x)\in C^2(-\infty:+\infty)$, $\psi(x)\in C^1(-\infty:+\infty)$. Виникає питання: як бути з задачами, в яких функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ даними властивостями не володіють? Наприклад, якщо початкове відхилення струни задане у вигляді ламаної (див. рис.3.2).

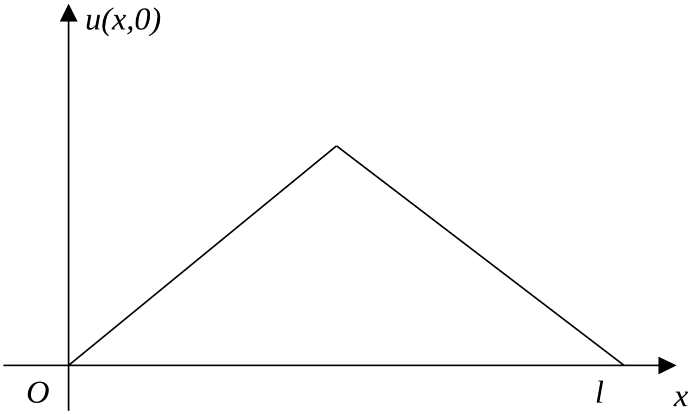

Рис. 3.2. Початкове відхилення струни

В цьому нам допоможе теорема 3.3, зміст якої полягає в тому, що малим відхиленням в початкових даних відповідають малі відхилення в розв'язку.

Розглянемо задачу Коші (3.1), (3.2), де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ відмінні від нуля на скінченному числі проміжків, тобто $\varphi(x) \in C^1(-\infty : +\infty)$, $\psi(x) \in C(-\infty : +\infty)$. Тоді дані функції можна апроксимувати рівномірно збіжними послідовностями функцій $\{\varphi_n(x)\}$, $\{\psi_n(x)\}$ такими, що $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$, $\psi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x)$ і $\varphi_n(x) \in C^2(-\infty : +\infty)$, $\psi_n(x) \in C^1(-\infty : +\infty)$. Для задачі Коші з початковими даними $\varphi_n(x)$ та $\psi_n(x)$ відповідає розв'язок $u_n(x,t)$.Оцінимо різницю $|u_{n+1}(x,t) - u_n(x,t)|$. В силу рівномірної збіжності послідовностей $\{\varphi_n(x)\}$ та $\{\psi_n(x)\}$, отримаємо, що $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall k > 0$ виконуються нерівності

$$|\varphi_{n+k}(x) - \varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{1+t_0},$$

$$|\psi_{n+k}(x) - \psi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{1+t_0}, \ \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

Тоді, згідно теореми 3.3, виконується нерівність

$$|u_{n+k}(x,t) - u_n(x,t)| < \varepsilon .$$

Отже, послідовність $\{u_n(x)\}$ є рівномірно збіжною до деякої функції $u(x,t)$. Дана функція називається узагальненим розв'язком задачі Коші (3.1), (3.2). При цьому

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} (\varphi_n(x+at) + \varphi_n(x-at)) +$$
$$+\frac{1}{2a}\lim_{n\to\infty}\int_{x-at}^{x+at}\psi_n(z)dz = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz.$$

Тобто, не дивлячись на обмеженість диференційованості функцій $\varphi(x,t)$ та $\psi(x,t)$, узагальнений розв'язок задачі Коші дається все тією ж формулою Д'Аламбера.

Практична робота №3
Задача Коші для рівнянь гіперболічного типу. Метод характеристик

Приклад П3.1. Розв'язати задачу Коші

$$u_{tt} = u_{xx} + bx^2,$$

$$u(x,0) = e^{-x},\ u_t(x,0) = d,\ d = const.$$

Розв'язання. Як відомо, розв'язок задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x).$$

можна знайти за формулою

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dzd\tau . \quad (П3.1)$$

Використовуючи (П3.1) в нашому випадку, отримаємо

$$u(x,t) = \frac{e^{-(x+t)} + e^{-(x-t)}}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} ddz + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} bz^2 dzd\tau =$$

$$= e^{-x}\cdot\frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{1}{2}d(x+t-x+t) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{b}{3}\left((x+t-\tau)^3 - (x-t+\tau)^3\right)d\tau =$$

$$= e^{-x}\cdot cht + dt - \frac{b}{6}\int_0^t (x+t-\tau)^3 d(x+t-\tau) - \frac{b}{6}\int_0^t (x-t+\tau)^3 d(x-t+\tau) =$$

$$= e^{-x}cht + dt - \frac{b}{24}(x+t-\tau)^4\Big|_0^t - \frac{b}{24}(x-t+\tau)^4\Big|_0^t =$$

$$= e^{-x}cht + dt - \frac{b}{24}\left(x^4 - (x+t)^4 + x^4 - (x-t)^4\right) =$$

$$= e^{-x}cht + dt + \frac{b}{2}x^2t^2 + \frac{b}{12}t^4.$$

Відповідь: $u(x,t) = e^{-x}cht + dt + \frac{b}{2}x^2t^2 + \frac{b}{12}t^4.$

Приклад П3.2. Знайти загальний розв'язок рівняння, попередньо звівши його до канонічного вигляду

$$2u_{xx}+6u_{xy}+4u_{yy}+u_x+u_y=0. \qquad (П3.2)$$

Розв'язання. Визначимо тип рівняння (П3.2). $D=a_{12}^2-a_{11}\cdot a_{22}=3^2-2\cdot 4=1>0 \Rightarrow$ рівняння (П3.2) є рівнянням гіперболічного типу. Характеристичне рівняння має вигляд

$$2(dy)^2-6dydx+4(dx)^2=0,$$

$$(dy)^2-3dydx+2(dx)^2=0,$$

$$(dy-2dx)(dy-dx)=0,$$

$$dy-2dx=0 \text{ або } dy-dx=0,$$

$$y-2x=const,\ y-x=const.$$

Проводимо наступну заміну змінних:

$$\xi=y-2x,\ \eta=y-x.$$

Тоді

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=-2u_\xi-u_\eta,\ u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=u_\xi+u_\eta.$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}(\xi_x)^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}(\eta_x)^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}=4u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}.$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}(\xi_y)^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}(\eta_y)^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}.$$

$$u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\eta\eta_{xy}+u_\xi\xi_{xy}=$$
$$=-2u_{\xi\xi}-3u_{\xi\eta}-u_{\eta\eta}.$$

Підставляючи знайдені похідні в рівняння (П3.2), отримуємо

$$8u_{\xi\xi}+8u_{\xi\eta}+2u_{\eta\eta}-12u_{\xi\xi}-18u_{\xi\eta}-6u_{\eta\eta}+4u_{\xi\xi}+8u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta}-$$
$$-2u_{\xi\eta}-u_\xi=0,$$

$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{2}u_\xi=0. \qquad (П3.3)$$

В рівнянні (П3.3) проведемо наступну заміну:

$$u(\xi,\eta)=e^{\lambda\xi+\mu\eta}v(\xi,\eta),$$

де $v(\xi,\eta)$ - нова невідома функція ; λ, μ - поки що довільні константи. Тоді

$$u_\xi=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\xi+\lambda v),\ u_\eta=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\eta+\mu v),\ u_{\xi\xi}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\xi}+2\lambda v_\xi+\lambda^2 v),$$

$$u_{\xi\eta}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\eta}+\lambda v_\eta+\mu v_\xi+\lambda\mu v),\ u_{\eta\eta}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\eta\eta}+2\mu v_\xi+\mu^2 v).$$

З (П3.3) отримуємо

$$e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(v_{\xi\eta}+\lambda v_{\eta}+\mu v_{\xi}+\lambda\mu v\right)+\frac{1}{2}e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(v_{\xi}+\lambda v\right)=0,$$

$$v_{\xi\eta}+\lambda v_{\eta}+(\mu+\frac{1}{2})+(v_{\xi}+\lambda v)=0. \qquad (\text{П}3.4)$$

Поклавши $\lambda=0$, $\mu=-\dfrac{1}{2}$, рівняння (П3.4) набуває вигляду:

$$v_{\xi\eta}=0. \qquad (\text{П}3.5)$$

Інтегруємо рівняння (П3.5)

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial\eta}=f(\eta),$$

де $f(\eta)$ - довільна функція. Далі

$$v(\xi,\eta)=\int f(\eta)d\eta+f_1(\xi),$$

де $f_1(\xi)$ - довільна функція. Отже,

$$v(\xi,\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta).$$

Повертаючись до вище проведених замін змінних, дістанемо

$$u(\xi,\eta)=\left(f_1(\xi)+f_2(\eta)\right)e^{-\frac{1}{2}\eta},$$

$$u(x,y)=\left(f_1(y-2x)+f_2(y-x)\right)e^{\frac{x-y}{2}},$$

де f_1, f_2 - довільні, двічі неперервно диференційовні функції.

<u>Відповідь</u>: $u(x,y)=(f_1(y-2x)+f_2(y-x))e^{\frac{x-y}{2}}$.

<u>Завдання для самостійної роботи</u>

І рівень

Розв'язати задачу Коші.

1. $u_{tt}=u_{xx}+axt$,

   $u(x,0)=x, \quad u_t(x,0)=\sin x$.

2. $u_{tt}=u_{xx}+ae^{-t}$,

   $u(x,0)=b\sin x, \quad u_t(x,0)=c\cos x$.

3. $u_{tt}=a^2u_{xx}+\sin\omega x$,

   $u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0$.

4. $u_{tt} = 9u_{xx} + 6$,

$u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = 4x$.

5. $u_{tt} = 4u_{xx} + \sin x$,

$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0$.

II рівень

Знайти загальний розв'язок рівняння, попередньо звівши його до канонічного вигляду.

1. $3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 4u_y + \frac{5}{16}u = 0$.

2. $3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} + u_x + u_y + \frac{1}{16}u - 16xe^{-\frac{x+y}{16}} = 0$.

3. $3u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 4e^x$.

4. $u_{xx} - 2\sin x \cdot u_{xy} - \cos^2 x \cdot u_{yy} - \cos x \cdot u_y = 0$.

Розв'язати задачу Коші.

5. $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + 2$,

$u(x,y,0) = x, \quad u_t(x,y,0) = y$.

6. $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + 6xyt$,

$u(x,y,0) = x^2 - y^2, \quad u_t(x,y,0) = xy$.

III рівень

Знайти загальний розв'язок рівняння.

1. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$.

2. $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$.

3. $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right) = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Розв'язати задачу Коші.

4. $4y^2u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0$,

$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_y(x,0) = \psi(x)$.

ТЕМА 4. Метод розділення змінних (метод Фур'є) для гіперболічних рівнянь

§ 4.1. Перша мішана крайова задача для однорідного хвильового рівняння (вільні коливання струни)

Розглянемо мішану крайову задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, x \in (0,l), t > 0, \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x \in [0,l], \tag{4.2}$$

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, \ t \geq 0, \tag{4.3}$$

де $\varphi(x) \in C^2(-\infty;+\infty)$, $\psi(x) \in C^1(-\infty;+\infty)$.

Будемо вимагати виконання так званих ***умов узгодженості***

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \ \psi(0) = \psi(l) = 0,$$

які є однією з необхідних умов існування класичного розв'язку крайової задачі (4.1)-(4.3).

Щоб розв'язати крайову задачу (4.1)-(4.3), спочатку розглянемо основну допоміжну задачу: знайти розв'язок рівняння (4.1), який задовольняє граничним умовам (4.3) і який тотожно не дорівнює нулю (не є тривіальним). Згідно методу розділення змінних (методу Фур'є) розв'язок основної допоміжної задачі шукаємо у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0, \tag{4.4}$$

де $X(x)$, $T(t)$ - поки що невідомі функції, які залежать лише від змінної x та змінної t відповідно.

Підставивши (4.4) в (4.1), дістанемо

$$T'' X = a^2 X'' T$$

або

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{4.5}$$

Фіксуючи $t = t_0$ і змінюючи довільним чином x, отримаємо, що ліва та права частини рівності (4.5) зберігають постійне значення при довільних t та x. Отже,

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \tag{4.6}$$

де $\lambda = const$. Знак “–” в (4.6) взято для зручності. Далі з рівності (4.6) одержуємо

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0\,, T \neq 0\,, \tag{4.7}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0\,, X \neq 0\,. \tag{4.8}$$

З (4.4) та граничних умов (4.3) слідує

$$X(0)T(t) = 0,\; X(l)T(t) = 0\,.$$

Врахувавши, що $T(t) \neq 0$ з вищенаведеної рівності маємо

$$X(0) = 0, X(l) = 0\,. \tag{4.9}$$

Отже, щоб знайти $X(x)$ та $T(t)$ потрібно розв’язати рівняння (4.7) та граничну задачу (4.8), (4.9).

Числа λ, при яких задача (4.8), (4.9) має нетривіальні розв’язки називаються ***власними значеннями***, а відповідні розв’язки задачі (4.8), (4.9) − ***власними функціями***.

Задача (4.8), (4.9) є частковим випадком так званої загальної спектральної задачі, або задачі Штурма–Ліувілля (див. §5.1).

Щоб знайти власні числа задачі (4.8), (4.9), розглянемо наступні випадки:

1. $\lambda < 0$. Характеристичне рівняння для лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (див., наприклад, [25, 40]) $k^2 + \lambda = 0$ в даному випадку має два дійсні корені $k_1 = \sqrt{-\lambda}, k_2 = -\sqrt{-\lambda}$. Тоді розв’язок звичайного диференціального рівняння (ЗДР) (4.9) має вигляд

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}\,,$$

а з умов (4.9) маємо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0. \end{cases}$$

Визначник вказаної системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}l} - e^{\sqrt{-\lambda}l} \neq 0\,,$$

тому однорідна система має лише тривіальний розв'язок $C_1 = C_2 = 0$. Тобто, $X(x) \equiv 0$. Отже, $\lambda < 0$ не є власним значенням задачі (4.8), (4.9).

2. $\lambda = 0$. Тоді розв'язок ЗДР (4.8) має вигляд

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

З (4.9) маємо

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 l + C_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0.$$

Отже, $\lambda = 0$ не є власним значенням задачі (4.8), (4.9).

3. $\lambda > 0$. Характеристичне рівняння для лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (4.8)

$$k^2 + \lambda = 0$$

в даному випадку має два комплексно спряжених корені

$$k_1 = i\sqrt{\lambda}, k_2 = -i\sqrt{\lambda}.$$

Тоді розв'язок ЗДР (4.8) має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

З (4.9) маємо

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

Тобто, $C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Оскільки ми вимагаємо, щоб $C_2 \neq 0$, то остання рівність можлива лише у випадку

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0,$$

$$\sqrt{\lambda}l = \pi n, n \in Z,$$

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n \in Z. \quad (4.10)$$

Для знайдених власних значень λ_n відповідають власні функції

$$X_n(x) = C_2 \sin\frac{\pi n}{l}x, C_2 = const. \quad (4.11)$$

Підставляючи знайдені λ_n в рівняння (4.7), отримаємо розв'язок даного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$T_n(t) = A_n^* \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n^* \sin\frac{\pi n}{l}at, \qquad (4.12)$$

де A_n^*, B_n^* – довільні сталі. Отже, частковим розв'язком нашої основної допоміжної задачі буде

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(x) = \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad (4.13)$$

де $A_n = C_2 A_n^*$, $B_n = C_2 B_n^*$. В силу лінійності та однорідності рівняння (4.1) сума його часткових розв'язків буде загальним розв'язком даного рівняння, тобто

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x. \quad (4.14)$$

Ряд (4.14) буде розв'язком рівняння (4.1) при умові, що він рівномірно збігається і його можна почленно диференціювати два рази по x та по t.

Для відшукання A_n та B_n використовуємо початкові умови (4.2). Одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x), \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n}{l}a \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x = \psi(x).$$

Припустимо, що функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ є кусково-неперервними. Тоді їх можна розкласти на відрізку $[0,l]$ в ряди Фур'є за синусами (див., наприклад, [7, 33])

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \text{ де } \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(z)\sin\frac{\pi n}{l}z\,dz;$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \text{ де } \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(z)\sin\frac{\pi n}{l}z\,dz.$$

Далі одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n}{l}a \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

тобто,

$$A_n = \varphi_n\,, B_n = \frac{l}{\pi n a}\psi_n\,. \qquad (4.15)$$

Отже, загальним розв'язком задачі (4.1)-(4.3) є ряд (4.14) з коефіцієнтами (4.15).

Можна довести (див.[34], ст.117), що якщо функція $\varphi(x) \in C^2(0;l)$ має кусково–неперервну третю похідну і задовольняє умовам $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, а функція $\psi(x) \in C^1(0;l)$ має кусково–неперервну другу похідну і задовольняє умовам узгодженості $\psi(0) = \psi(l) = 0$, тоді функція $u(x,t)$, визначена рядом (4.14) з коефіцієнтами (4.15) є розв'язком задачі (4.1)–(4.3) і має неперервні похідні по x та t до другого порядку включно. При цьому ряд (4.14) можна почленно диференціювати два рази по x та t і отримані ряди збігаються рівномірно та абсолютно при $x \in [0;l]$, $t > 0$.

§ 4.2. Перша мішана крайова задача для неоднорідного хвильового рівняння (вимушені коливання струни)

Знайдемо розв'язок крайової задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)\,, t > 0\,, x \in (0;l)\,, \qquad (4.16)$$

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, u_t(x,0) = \psi(x)\,, x \in [0;l]\,, \qquad (4.17)$$

$$u(0,t) = 0\,, u(l,t) = 0\,, t \ge 0\,. \qquad (4.18)$$

Згідно принципу редукції загальної задачі (див. §2.6) розв'язок крайової задачі (4.16)–(4.18) шукаємо у вигляді

$$u(x,t) = z(x,t) + \nu(x,t)\,, \qquad (4.19)$$

де $z(x,t)$ є розв'язком задачі (4.1)–(4.3), а $\nu(x,t)$ – розв'язком задачі

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t), t > 0, x \in (0;l), \qquad (4.20)$$

$$v(x,0) = 0\,, v_t(x,0) = 0\,, x \in [0;l]\,, \qquad (4.21)$$

$$v(0,t) = 0\,, v(l,t) = 0\,, t \ge 0\,. \qquad (4.22)$$

Згідно попереднього параграфу $z(x,t)$ визначається рядом (4.14) з коефіцієнтами (4.15). Функцію $v(x,t)$ шукаємо у вигляді

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \qquad (4.23)$$

де $X_n(x)$ є власними функціями задачі Штурма–Ліувілля (4.8), (4.9). Тобто, $X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$ (тут довільні константи покладемо рівними одиниці).

Ряд (4.23) задовольняє граничні умови (4.22). Потрібно вибрати функції $T_n(t)$ таким чином, щоб він також задовольняв рівняння (4.20) та початкові умови (4.21).

Припустимо, що функцію $f(x,t)$ можна розкласти в ряд Фур'є за системою власних функцій $\sin\frac{\pi n}{l}x$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{4.24}$$

де $f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi$. Підставляючи ряди (4.23), (4.24) у рівняння (4.20), маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) - f_n(t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x = 0,$$

що можливе лише у випадку

$$T_n''(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t), n = 1,2,\ldots \tag{4.25}$$

Щоб функція $\nu(x,t)$ задовольняла початкові умови (4.21), потрібно вимагати

$$T_n(0) = 0,\ T_n'(0) = 0. \tag{4.26}$$

Для отримання (4.26) досить підставити ряд (4.23) в умови (4.21).

Характеристичне рівняння для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (4.25) має вигляд

$$k^2 + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 = 0,$$

звідки маємо

$$k_{1,2} = \pm \frac{\pi n a}{l} i.$$

Тому, згідно методу варіації довільної сталої (метод Лагранжа), загальний розв’язок рівняння (4.25) шукаємо у вигляді (див., наприклад, [25, 40, 46])

$$T_n(t) = C_1(t)\cos\frac{\pi n a}{l}t + C_2(t)\sin\frac{\pi n a}{l}t.$$

Для визначення невідомих функцій $C_1(t)$, $C_2(t)$ маємо систему

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos\dfrac{\pi n a}{l}t + C_2'(t)\sin\dfrac{\pi n a}{l}t = 0, \\ -\dfrac{\pi n a}{l}C_1'(t)\sin\dfrac{\pi n a}{l}t + \dfrac{\pi n a}{l}C_2'(t)\cos\dfrac{\pi n a}{l}t = f_n(t), \end{cases}$$

звідки одержимо (методом підстановки або додавання)

$$\begin{cases} C_1'(t)\left(\dfrac{\pi n a}{l}\cos^2\dfrac{\pi n a}{l}t + \dfrac{\pi n a}{l}\sin^2\dfrac{\pi n a}{l}t\right) = -f_n(t)\sin\dfrac{\pi n a}{l}t, \\ C_2'(t)\left(\dfrac{\pi n a}{l}\sin^2\dfrac{\pi n a}{l}t + \dfrac{\pi n a}{l}\cos^2\dfrac{\pi n a}{l}t\right) = f_n(t)\cos\dfrac{\pi n a}{l}t, \end{cases}$$

$$C_1(t) = -\frac{l}{\pi n a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi n a}{l}\tau d\tau + C_1^*,$$

$$C_2(t) = \frac{l}{\pi n a}\int_0^t f_n(\tau)\cos\frac{\pi n a}{l}\tau d\tau + C_2^*.$$

Отже, загальним розв’язком рівняння (4.25) є

$$T_n(t) = \left(-\frac{l}{\pi n a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi n a}{l} \tau d\tau + C_1^* \right) \cos \frac{\pi n a}{l} t +$$

$$\left(\frac{l}{\pi n a} \int_0^t f_n(\tau) \cos \frac{\pi n a}{l} \tau d\tau + C_2^* \right) \sin \frac{\pi n a}{l} t,$$

або

$$T_n(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi n a}{l} (t-\tau) d\tau + C_1^* \cos \frac{\pi n a}{l} t + C_2^* \sin \frac{\pi n a}{l} t.$$

Для визначення констант C_1^* та C_2^* використаємо умови (4.26)

$$\begin{cases} T_n(0) = C_1^* = 0, \\ T_n'(0) = -\dfrac{\pi n a}{l} C_2^* = 0, \end{cases} \Rightarrow C_1^* = 0, C_2^* = 0.$$

Тоді розв’язком задачі Коші (4.25), (4.26) є функція

$$T_n(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi n a}{l} (t-\tau) d\tau .$$

Отже, розв’язок задачі (4.16)–(4.18) має вигляд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^l \left[\frac{1}{l} \varphi(\xi) \cos \frac{\pi n a}{l} t + \frac{1}{\pi n a} \psi(\xi) \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{\pi n}{l} t +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n a} \int_0^t \int_0^l f(\xi,\tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \sin \frac{\pi n a}{l} (t-\tau) d\xi d\tau \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Можна довести, що одержаний ряд буде розв’язком поставленої задачі, якщо функція $f(x,t) \in C^2(0;l)$ неперервна і $f(0,t) = f(l,t) = 0$ при $t \geq 0$ [34, ст.123].

§ 4.3. Перша мішана крайова задача для неоднорідного хвильового рівняння з неоднорідними граничними умовами

Знайдемо розв'язок крайової задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)\,,\; t>0\,,\; x\in(0;l)\,, \qquad (4.27)$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,\; u_t(x,0)=\psi(x)\,,\; x\in[0;l]\,, \qquad (4.28)$$

$$u(0,t)=\mu^{(1)}(t)\,,\; u(l,t)=\mu^{(2)}(t)\,,\; t\ge 0\,, \qquad (4.29)$$

де $\mu^{(1)}(t),\;\mu^{(2)}(t)$ - деякі задані функції змінної t. Вводячи заміну

$$u(x,t)=\omega(x,t)+\mu^{(1)}(t)+\frac{\mu^{(2)}(t)-\mu^{(1)}(t)}{l}x$$

для нової невідомої функції $\omega(x,t)$ отримаємо наступну крайову задачу

$$\omega_{tt} = a^2\omega_{xx} + f^{(1)}(x,t)\,,\; t>0\,,\; x\in(0;l)\,, \qquad (4.30)$$

$$\omega(x,0)=\varphi^{(1)}(x)\,,\; \omega_t(x,0)=\psi^{(1)}(x)\,,\; x\in[0;l]\,, \qquad (4.31)$$

$$\omega(0,t)=0\,,\; \omega(l,t)=0\,,\; t\ge 0\,, \qquad (4.32)$$

де

$$f^{(1)}(x,t)=f(x,t)-\mu^{(1)}_{tt}-\frac{\mu^{(2)}_{tt}-\mu^{(1)}_{tt}}{l}x\,,$$

$$\varphi^{(1)}(x)=\varphi(x)-\mu^{(1)}-\frac{\mu^{(2)}-\mu^{(1)}}{l}x\,,\; \psi^{(1)}(x)=\psi(x)-\mu^{(1)}_t-\frac{\mu^{(2)}_t-\mu^{(1)}_t}{l}x\,.$$

Задача (4.30)–(4.32) розв'язана в попередньому параграфі.

Отже, першу мішану крайову задачу з неоднорідними граничними умовами можна звести до задачі з однорідними граничними умовами.

§ 4.4. Перша мішана крайова задача для однорідного хвильового рівняння в прямокутнику (вільні коливання прямокутної мембрани)

Розглянемо наступну крайову задачу:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx}+u_{yy}),\, t>0,\; 0<x<b,\; 0<y<c\,, \qquad (4.33)$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y),\, u_t(x,y,0)=\psi(x,y),\; 0\le x\le b,\; 0\le y\le c, \qquad (4.34)$$

$$u(0,y,t)=u(b,y,t)=0\,, \qquad (4.35)$$

$$u(x,0,t)=u(x,c,t)=0,\; t\ge 0. \qquad (4.36)$$

Вимагаємо виконання умов узгодженості

$$\varphi(0,\ y) = \varphi(x,\ 0) = \varphi(b,\ y) = \varphi(x,\ c) = 0;$$

$$\psi(0,\ y) = \psi(x,\ 0) = \psi(b,\ y) = \psi(x,\ c) = 0.$$

Фізично задача (4.33)-(4.36) описує коливання однорідної прямокутної мембрани зі сторонами b і c, які здійснюються внаслідок початкового відхилення і початкової швидкості, причому, край мембрани нерухомо закріплений.

Як і в одновимірному випадку, розв’язок шукаємо у вигляді

$$u(x,y,t) = V(x,y)\cdot T(t) \neq 0\,. \tag{4.37}$$

Підставляючи (4.37) у рівняння (4.33) та граничні умови (4.35), (4.36) і відокремлюючи змінні, отримуємо для функції $T(t)$ рівняння

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0\,, \tag{4.38}$$

а для функції $V(x,y)$ крайову задачу

$$\begin{gathered} V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \\ V(0,y) = V(b,y) = 0, \\ V(x,0) = V(x,c) = 0, \lambda = const. \end{gathered} \tag{4.39}$$

Задачу на власні значення (4.39) також розв’язуємо методом відокремлення змінних. Тобто,

$$V(x,y) = X(x)\cdot Y(y) \neq 0\,. \tag{4.40}$$

Відокремлюючи змінні в задачі (4.39), одержуємо дві задачі на власні значення

$$\begin{gathered} X''(x) + \mu X(x) = 0, \\ X(0) = X(b) = 0, \mu = const, \end{gathered} \tag{4.41}$$

$$\begin{gathered} Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(c) = 0. \end{gathered} \tag{4.42}$$

Повторюючи міркування, наведені при дослідженні задачі Штурма–Ліувілля (4.8), (4.9), дістанемо

$$\mu_n = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, X_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n}{b}x, \quad n = 1,2,3...,$$

$$\lambda_{n,m} - \mu_n = \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2, Y_m(y) = C_m^* \sin\frac{\pi m}{c}y, \quad m = 1,2,3...,$$

де C_n, C_m^* − деякі константи.

Отже, власним значенням задачі (4.39)

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2$$

відповідають власні функції

$$V_{n,m}(x,y) = C_{n,m}\sin\frac{\pi n}{b}x\sin\frac{\pi m}{c}y; \quad n,m = 1,2,3... \qquad (4.43)$$

де $C_{n,m} = C_n C_m^*$.

Підставивши знайдені власні значення $\lambda_{n,m}$ у рівняння (4.38) та проінтегрувавши його, одержимо

$$T_{n,m}(t) = A_{n,m}^* \cos a\sqrt{\lambda_{n,m}}t + B_{n,m}^* \sin a\sqrt{\lambda_{n,m}}t\ ,$$

де $A_{n,m}^*, B_{n,m}^*$ – константи.

Отже, частковим розв’язком рівняння (4.33), який задовольняє граничні умови (4.35), (4.36), буде

$$u_{n,m}(x,y,t) = V_{n,m}(x,y)T_{n,m}(t) =$$

$$= (A_{n,m}\cos a\sqrt{\lambda_{n,m}}t + B_{n,m}\sin a\sqrt{\lambda_{n,m}}t)\cdot\sin\frac{\pi n}{b}x\sin\frac{\pi m}{c}y,$$

де $A_{n,m} = A_{n,m}^*\cdot C_{n,m}$, $B_{n,m} = B_{n,m}^*\cdot C_{n,m}$. В силу лінійності та однорідності рівняння, сума його часткових розв’язків буде загальним розв’язком даного рівняння. Тобто,

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u_{n,m}(x,y,t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A_{n,m}\cos a\sqrt{\lambda_{n,m}}t + B_{n,m}\sin a\sqrt{\lambda_{n,m}}t)\cdot\sin\frac{\pi n}{b}x\sin\frac{\pi m}{c}y. \qquad (4.44)$$

Для відшукання $A_{n,m}$ та $B_{n,m}$ використаємо початкові умови (4.34). Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{n,m}\sin\frac{\pi n}{b}x\sin\frac{\pi m}{c}y = \varphi(x,y),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} a\sqrt{\lambda_{n,m}} \sin\frac{\pi n}{b} x \sin\frac{\pi m}{c} y = \psi(x, y).$$

Припустимо, що функції $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ в прямокутнику $0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le c$ можна розкласти в подвійні ряди Фур'є

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{n,m} \sin\frac{\pi n}{b} x \sin\frac{\pi m}{c} y,$$

де $\varphi_{n,m} = \dfrac{4}{bc}\int\limits_0^b\int\limits_0^c \varphi(\xi,\eta)\sin\dfrac{\pi n}{b}\xi \sin\dfrac{\pi m}{c}\eta d\xi d\eta$;

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \psi_{n,m} \sin\frac{\pi n}{b} x \sin\frac{\pi m}{c} y,$$

де $\psi_{n,m} = \dfrac{4}{bc}\int\limits_0^b\int\limits_0^c \psi(\xi,\eta)\sin\dfrac{\pi n}{b}\xi \sin\dfrac{\pi m}{c}\eta d\xi d\eta$.

Тоді одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \sin\frac{\pi n}{b} x \sin\frac{\pi m}{c} y = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{n,m} \sin\frac{\pi n}{b} x \sin\frac{\pi m}{c} y,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} a\sqrt{\lambda_{n,m}} \sin\frac{\pi n}{b} x \sin\frac{\pi m}{c} y = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \psi_{n,m} \sin\frac{\pi n}{b} x \sin\frac{\pi m}{c} y,$$

тобто

$$A_{n,m} = \varphi_{n,m}, \quad B_{n,m} = \frac{\psi_{n,m}}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}}. \tag{4.45}$$

Отже, загальним розв'язком задачі (4.33)-(4.36) є ряд (4.44) з коефіцієнтами (4.45).

<u>Практична робота №4</u>
Метод розділення змінних (метод Фур'є) для рівнянь гіперболічного типу

<u>Приклад П4.1.</u> Розв'язати наступну крайову задачу:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, t > 0, 0 < x < l,$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 0, \; u_t(x,0) = \sin\frac{2\pi}{l}x.$$

<u>Розв'язання</u>. Як відомо , розв'язок крайової задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, t > 0, 0 < x < l,$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \; u_t(x,0) = \psi(x),$$

згідно методу розділення змінних подається у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

де

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi, \; B_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi.$$

В нашому випадку $\varphi(x) = 0$, а тому $A_n = 0$, n = 1,2,…. Отже,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{\pi n}{l}at \sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Для визначення B_n маємо

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}aB_n \cos\frac{\pi n}{l}at \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}aB_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \sin\frac{2\pi}{l}x. \qquad (\text{П}4.1)$$

Рівність (П4.1) можлива лише у випадку

$$B_n=\begin{cases}0, n\neq 2;\\ \dfrac{l}{2\pi a}, n=2.\end{cases}$$

Відповідь: $u(x,t)=\dfrac{l}{2\pi a}\sin\dfrac{2\pi}{l}at\cdot\sin\dfrac{2\pi}{l}x.$

Приклад П4.2. Розв'язати крайову задачу

$$u_{tt}=a^2u_{xx}, \tag{П4.2}$$

$$u(0,t)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0, \tag{П4.3}$$

$$u(x,0)=\sin\frac{5\pi}{2l}x,\ \ u_t(x,0)=\sin\frac{\pi}{2l}x\,. \tag{П4.4}$$

Розв'язання. Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t)\not\equiv 0\,. \tag{П4.5}$$

Підставляючи (П4.5) в рівняння (П4.2) та граничні умови (П4.3), розділяючи змінні, отримуємо рівняння для функції $T(t)$

$$T''+\lambda a^2T=0,\ \ T(t)\not\equiv 0 \tag{П4.6}$$

та задачу Штурма–Ліувіля для функції $X(x)$

$$X''+\lambda X=0,\ \ X(x)\not\equiv 0\,, \tag{П4.7}$$

$$X(0)=0,\ X'(l)=0\,. \tag{П4.8}$$

Можливі наступні випадки:

1) $\lambda=0\Rightarrow X(x)=C_1x+C_2$, де C_1, C_2 - довільні константи.

З граничних умов (П4.8) отримуємо $C_1=0,\ \ C_2=0.$ Отже, $\lambda=0$ не є власним значенням, оскільки $X(x)\equiv 0$.

2) $\lambda<0\Rightarrow X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$.

З граничних умов (П4.8) отримуємо

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ \sqrt{-\lambda}C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}+\sqrt{-\lambda}C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-C_1=C_2,\\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0,\end{cases}\Rightarrow C_1=0, C_2=0.$$

Отже, немає власних значень $\lambda<0$, оскільки $X(x)\equiv 0$.

3) $\lambda>0\Rightarrow X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$.

З граничних умов (П4.8) отримуємо

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \cos\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

Отже, власним значенням

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2$$

відповідають власні функції

$$X_n(x) = C_2 \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x, \; n = 0, 1, 2... \qquad (\text{П}4.9)$$

Розв'язуючи рівняння (П4.6) при знайдених λ_n та враховуючи (П4.5), (П4.9), дістанемо

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}at + B_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}at\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x,$$

де A_n, B_n довільні константи.

З початкових умов (П4.4) маємо:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x = \sin\frac{5\pi}{2l}x \Rightarrow A_n = \begin{cases} 1, n = 2; \\ 0, n \neq 2. \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\pi a}{2l}B_n\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x = \sin\frac{\pi}{2l}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n = \begin{cases} \frac{2l}{\pi a}, n = 0; \\ 0, n \neq 0. \end{cases}$$

<u>Відповідь</u>: $u(x,t) = \frac{2l}{\pi a}\sin\frac{\pi}{2l}at\cdot\sin\frac{\pi}{2l}x + \cos\frac{5\pi}{2l}at\cdot\sin\frac{5\pi}{2l}x.$

<u>Приклад П4.3</u>. Розв'язати наступну крайову задачу:

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad (\text{П}3.10)$$

$$u(0,t) = t^2, \; u(\pi,t) = t^3,$$

$$u(x,0) = \sin x, \; u_t(x,0) = 0, \; 0 < x < \pi, \; t > 0.$$

Розв'язання. Якщо при $x=0, x=l$ задано неоднорідні граничні умови першого роду

$$u(0,t)=\mu^{(1)}(t),\ \ u(l,t)=\mu^{(2)}(t),$$

то вводячи заміну

$$u(x,t)=\omega(x,t)+\mu^{(1)}(t)+x\frac{\mu^{(2)}(t)-\mu^{(1)}(t)}{l},$$

ми отримаємо однорідні граничні умови для нової невідомої функції $\omega(x,t)$.

В нашому випадку

$$u(x,t)=\omega(x,t)+t^2+x\frac{t^3-t^2}{\pi}. \tag{П4.11}$$

Тоді, знайшовши похідні u_{tt}, u_{xx} та підставивши їх у рівняння (П4.10), дістанемо наступну першу мішану крайову задачу для нової невідомої функції $\omega(x,t)$:

$$\omega_{tt}=\omega_{xx}-2-\frac{x}{\pi}(6t-2),$$

$$\omega(0,t)=0,\ \ \omega(\pi,t)=0,$$

$$\omega(x,0)=\sin x,\ \ \omega_t(x,0)=0,\ \ 0<x<\pi,\ \ t>0.$$

Як відомо, розв'язок крайової задачі

$$\omega_{tt}=a^2\omega_{xx}+f(x,t), t>0, x\in(0,l),$$

$$\omega(0,t)=\omega(l,t)=0,\ \ t\geq 0,$$

$$\omega(x,0)=\varphi(x),\ \omega_t(x,0)=\psi(x),\ x\in[0,l]$$

подається у вигляді ряду

$$\omega(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi n}{l}at+B_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n a}\int_0^t\int_0^j f(\xi,\tau)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\cdot\sin\frac{\pi n a}{l}(t-\tau)d\tau\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

де

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi,\ \ B_n=\frac{2}{\pi n a}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi.$$

Знайшовши A_n, B_n, ми знайдемо $\omega(x,t)$, а з (П4.11) - невідому функцію $u(x,t)$.

Завдання для самостійної роботи

I рівень

Розв'язати крайові задачі при $0 < x < l, t \geq 0$.

1. $u_{tt} = 9u_{xx}$,
$u(0,t) = u(l,t) = 0$,
$u(x,0) = \cos\frac{15\pi}{l}x$, $u_t(x,0) = 0$.

2. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$,
$u(0,t) = u(l,t) = 0$,
$u(x,0) = \cos\frac{\pi}{2l}x$, $u_t(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2l}x + \cos\frac{5\pi}{2l}x$.

3. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + Axe^{-t}$,
$u(0,t) = u(l,t) = 0$,
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$.

4. $u_{tt} = u_{xx}$, $x \in (0,4)$, $t > 0$,
$u(0,t) = 0$, $u(4,t) = 0$,
$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, x \in [0;2], \\ 2 - \frac{1}{2}x, x \in [2;4]. \end{cases}$$

5. $u_{tt} = u_{xx}$, $x \in (0;3)$, $t > 0$,
$u(0,t) = 0$, $u(3,t) = t$,
$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$.

II рівень

Розв’язати крайові задачі.

1. $u_{tt} = u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,

$u(0,t) = e^{-t}$, $u(\pi,t) = t$,

$u(x,0) = \sin x \cos x$, $u_t(x,0) = 1$.

2. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t \geq 0$,

$u(0,t) = u_x(l,t) = 0$,

$u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = \sin\frac{\pi}{2l} + \sin\frac{3\pi}{2l}$.

3. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin t$, $0 < x < l$, $t \geq 0$,

$u(0,t) = u_x(l,t) = 0,$

$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$.

4. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,

$u_x(0,t) = 0$, $u_x(\pi,t) = 0$,

$u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = 1$.

5. $u_{tt} = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$,

$u(0,t) = t + 1,$ $u(1,t) = t^3 + 2$,

$u(x,0) = x + 1$, $u_t(x,0) = 0$.

<u>ТЕМА 5.</u> Спеціальні функції математичної фізики

§ 5.1. Загальна задача Штурма-Ліувілля

Задачі на власні значення, які нам довелося розв'язувати в темі 4, є частковими випадками загальної задачі Штурма-Ліувілля.

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left[\lambda\rho(x)-g(x)\right]y(x)=0,\quad a<x<b, \tag{5.1}$$

де $y(x)\in C^2(a;b)$, $p(x)\in C^1(a;b)$, $\rho(x)\in C(a;b)$, $g(x)\in C(a;b)$, $p(x)\geq 0$, $\rho(x)>0$; функція $\rho(x)$ є обмеженою на $[a,b]$, $\lambda=const$.

Сформулюємо для рівняння (5.1) задачу Штурма-Ліувілля: знайти всі λ (власні значення), для яких існують нетривіальні розв'язки рівняння (5.1) $y(x)$ (власні функції), які задовольняють граничним умовам

$$\alpha y(a)+\beta y'(a)=0, \tag{5.2}$$

$$\gamma y(b)+\delta y'(b)=0, \tag{5.3}$$

де $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ - константи, причому $\alpha^2+\beta^2=0$, $\gamma^2+\delta^2=0$.

Розглянемо деякі властивості вказаних власних значень та власних функцій задачі (5.1)–(5.3).

Властивість 5.1. Якщо функція $y_1(x)$ є власною функцією, яка відповідає власному значенню λ_1, то функція $Cy_1(x)$, де $C\neq 0$ - довільна константа, також буде власною функцією, яка відповідає власному значенню λ_1.

Властивість 5.2. Нехай $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є власними функціями задачі (5.1)-(5.3), які відповідають власному значенню λ_1. Тоді будь-яка їх лінійна комбінація

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

де $C_1,C_2=const$ також буде власною функцією, яка відповідає цьому ж власному значенню λ_1.

Доведення двох вищенаведених властивостей здійснюється безпосередньою перевіркою, тобто, підстановкою функцій $Cy_1(x)$ та

$(C_1y_1(x)+C_2y_2(x))$ відповідно в рівняння (5.1) та граничні умови (5.2), (5.3).

Властивість 5.3. Якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$ є власними функціями задачі (5.1)–(5.3), які відповідають різним власним значенням $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то вони ортогональні на відрізку $[a;b]$ з вагою $\rho(x)$, тобто,

$$\int_a^b \rho(x)y_1(x)y_2(x)dx = 0. \qquad (5.4)$$

Доведення. З рівняння (5.1) маємо

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_1}{dx}\right]+\left[\lambda_1\rho(x)-g(x)\right]y_1(x)\equiv 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_2}{dx}\right]+\left[\lambda_2\rho(x)-g(x)\right]y_2(x)\equiv 0.$$

Домножуючи першу тотожність на $y_2(x)$, а другу на $y_1(x)$ і віднімаючи результати один від одного, одержимо

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_1}{dx}\right]y_2(x)-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_2}{dx}\right]y_1(x)=$$
$$=(\lambda_2-\lambda_1)\rho(x)y_1(x)y_2(x).$$

Інтегруючи отриману тотожність на відрізку $[a,b]$, дістанемо

$$(\lambda_2-\lambda_1)\int_a^b \rho(x)y_1(x)y_2(x)dx=$$
$$=\int_a^b\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_1}{dx}\right]y_2(x)-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_2}{dx}\right]y_1(x)\right)dx.$$

Застосуємо до інтеграла в правій частині отриманої рівності формулу інтегрування за частинами. З урахуванням того, що функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ задовольняють умовам (5.2), (5.3), маємо

$$\int_a^b\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_1}{dx}\right]y_2(x)-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_2}{dx}\right]y_1(x)\right)dx=$$

$$= p(x)\frac{dy_1}{dx}y_2\Big|_a^b - \int_a^b p(x)\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx}dx - p(x)\frac{dy_2}{dx}y_1\Big|_a^b +$$

$$+\int_a^b p(x)\frac{dy_2}{dx}\frac{dy_1}{dx}dx = p(x)\frac{dy_1}{dx}y_2\Big|_a^b - p(x)\frac{dy_2}{dx}y_1\Big|_a^b =$$

$$= -p(b)\frac{\gamma}{\delta}y_1(b)y_2(b) + p(a)\frac{\alpha}{\beta}y_1(a)y_2(a) +$$

$$+ p(b)\frac{\gamma}{\delta}y_2(b)y_1(b) - p(a)\frac{\alpha}{\beta}y_2(a)y_1(a) = 0.$$

Отже,

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\int_a^b \rho(x)y_1(x)y_2(x)dx = 0.$$

Згідно умов теореми $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Враховуючи вищенаведену рівність отримуємо (5.4).

Властивість 5.3 доведена.

Властивість 5.4. Всі власні значення задачі (5.1)-(5.3) дійсні.

Доведення. Припустимо, що $\lambda = \mu + i\eta$ $(\eta \neq 0)$ є власним значенням, а $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ відповідною власною функцією. Тоді виконується тотожність

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\left(\frac{dy_1}{dx} + i\frac{dy_2}{dx}\right)\right] + [(\mu + i\eta)\rho(x) - g(x)](y_1(x) + iy_2(x)) \equiv 0,$$

або

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_1}{dx}\right] + [\mu\rho(x) - g(x)]y_1(x) - \eta\rho(x)y_2(x) \equiv 0,$$

$$i\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_1}{dx}\right] + [\mu\rho(x) - g(x)]y_1(x) - \eta\rho(x)y_2(x)\right) \equiv 0.$$

Віднімаючи почленно ці тотожності, отримаємо

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\left(\frac{dy_1}{dx} - i\frac{dy_2}{dx}\right)\right] + [(\mu - i\eta)\rho(x) - g(x)](y_1(x) - iy_2(x)) \equiv 0.$$

Таким чином, $\overline{\lambda} = \mu - i\eta,\quad \overline{y}(x) = y_1(x) - iy_2(x)$ є власними значеннями та власною функцією розглядуваної задачі. Згідно властивості (5.3) маємо

$$\int_a^b \rho(x)\big(y_1(x) + iy_2(x)\big)\big(y_1(x) - iy_2(x)\big)dx = 0,$$

або

$$\int_a^b \rho(x)\big(y_1^2(x) + y_2^2(x)\big)dx = 0.$$

Остання рівність неможлива, оскільки $\rho(x) > 0.$ Ми прийшли до суперечності.
Властивість 5.4 доведена.

Властивість 5.5. Якщо $g(x) \ge 0$, то всі власні значення задачі (5.1)–(5.3) невід'ємні.
Зауваження 5.1. Властивість 5.4 обґрунтовує те, чому ми в §4.1 не розглядали комплексних власних значень задачі Штурма-Ліувілля (4.8), (4.9).

§ 5.2. Спеціальні функції математичної фізики

При розв'язуванні задач математичної фізики методом розділення змінних (методом Фур'є) в областях з круговою, циліндричною або сферичною симетріями виникає необхідність використання спеціальних функцій.

Рівняння (5.1) називається загальним рівнянням теорії спеціальних функцій. Спеціальні функції – це розв'язки задачі Штурма–Ліувілля для деяких часткових випадків рівняння (5.1). Розглянемо деякі з них.

1) $p(x) \equiv x, g(x) \equiv \dfrac{n^2}{x},\quad \rho(x) \equiv x,\quad a = 0,\quad b = l.$

Рівняння (5.1) в даному випадку набуває вигляду

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0,\quad 0 < x < l. \tag{5.5}$$

Також будемо вимагати виконання граничних умов

$$\begin{cases} y(x) - \textit{обмежена при } x \to +0, \\ y(l) = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Введемо заміну змінних $t = \sqrt{\lambda} x$. Тоді з (5.5) маємо

$$\sqrt{\lambda} \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} \frac{dy}{dt} \right) + \left(\sqrt{\lambda} t - \frac{n^2 \sqrt{\lambda}}{t} \right) y = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(t \frac{dy}{dt} \right) + \left(t - \frac{n^2}{t} \right) y = 0, \quad 0 < t < \sqrt{\lambda} l. \tag{5.7}$$

Рівняння (5.7) називається рівнянням Бесселя порядку n. Розв‘язком рівняння (5.7) при виконанні першої з умов (5.6) є функції Бесселя першого роду (див., наприклад, [1, 18, 31, 49]), які для $n \in N$ та $n = 0$ визначаються за формулою

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{t}{2} \right)^{2k+n}.$$

Повертаючись до заміни $t = \sqrt{\lambda} x$ і використовуючи другу з граничних умов (5.6), маємо

$$J_n\left(\sqrt{\lambda} l \right) = 0,$$

або

$$J_n(\mu) = 0,$$

де $\mu = \sqrt{\lambda} l > 0$. Якщо $\mu_k^{(n)}$ - k-й додатний корінь вищенаведеного рівняння, то

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{l} \right)^2, \quad y_k(x) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{l} x \right), \; k = 1,2,3...$$

будуть відповідно власними числами та власними функціями задачі Штурма-Ліувілля (5.5), (5.6).

2) $p(x) \equiv 1 - x^2, \quad \rho(x) \equiv 1, \quad g(x) \equiv 0, \quad a = -1, \quad b = 1.$

Власні числа й власні функції задачі Штурма-Ліувілля для рівняння (5.1)

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0, \; -1 < x < 1, \tag{5.8}$$

$$\begin{cases} y(x) - обмежена\ при\ x \to 1-0, \\ y(x) - обмежена\ при\ x \to -1+0, \end{cases}$$

мають вигляд

$$\lambda_k = k(k+1), \quad y_k(x) = P_k(x), k = 0,1,2...,$$

де $P_k(x)$- многочлени Лежандра, які визначаються за формулою $P_k(x) = \frac{d^k}{2^k k! dx^k}(x^2-1)^k, \qquad k>0; \quad P_0(x) \equiv 1$. Рівняння (5.8) називається рівнянням Лежандра нульового порядку.

3) $p(x) \equiv 1 - x^2, \quad \rho(x) \equiv 1, \quad g(x) \equiv \frac{m^2}{1-x^2}$ ($m \geq 0$ – ціле), $a = -1, \quad b = 1.$

Задача Штурма-Ліувілля для рівняння (5.1)

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^2 \frac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0, \quad -1 < x < 1, \qquad (5.9)$$

$$\begin{cases} y(x) - обмежена\ при\ x \to 1-0, \\ y(x) - обмежена\ при\ x \to -1+0, \end{cases}$$

має власні числа і функції

$$\lambda_k = k(k+1), \quad y_k(x) = P_k^{(m)}(x), \quad k = m, m+1, m+2, ...,$$

де $P_k^{(m)}(x)$ – приєднані функції Лежандра, які визначаються наступним чином:

$$\begin{cases} P_k^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m P_k(x)}{dx^m}, \quad m > 0, \quad k \geq m, \\ P_k^{(0)}(x) = P_k(x), \quad m = 0, \quad k \geq 0. \end{cases}$$

Рівняння (5.9) називається рівнянням Лежандра порядку m.

<u>ТЕМА 6.</u> Позначення та криволінійні координати в математичній фізиці

§ 6.1. Диференціальні операції в криволінійних координатах

Нехай в деякій області D задано функцію $u = u(x, y, z)$.

Градієнтом скалярної функції $u(x, y, z)$ називається вектор

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні вектори або орти відповідних осей декартової системи координат.

Оператором Гамільтона (гамільтоніаном) (позначається символом ∇ "набла") називається наступна символічна операція:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Тобто, $grad\ u = \nabla u$. Градієнт скалярної функції *u* – це вектор, який визначає напрям найшвидшого росту функції. В зв'язку з цим визначають похідну за напрямком $\vec{l}$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{l} \cdot grad\, u.$$

Тому кажуть, що $grad\, u$ є мірою неоднорідності скалярного поля *u*.

Нехай з кожною точкою *M(x,y,z)* області *D* пов'язаний деякий вектор

$$a(x, y, z) = a_1(x, y, z) \cdot \vec{i} + a_2(x, y, z) \cdot \vec{j} + a_3(x, y, z) \cdot \vec{k},$$

тобто, задана вектор-функція *a(M)*.

Дивергенцією вектора *a* називається наступна скалярна функція:

$$div\, a = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z},$$

або $div\, a = \nabla \cdot a$.

Оператор ∇^2 називається ***оператором Лапласа*** і визначається

$$\nabla^2 \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Інколи при вивченні певних фізичних задач незручно користуватись декартовою системою координат, а значно простіше розв'язати задачу в іншій системі координат.

Нехай в системі координат ($g_1; g_2; g_3$) з одиничними ортами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ відомо формули, які дають перехід в декартову систему координат $x = x(g_1; g_2; g_3)$, $y = y(g_1; g_2; g_3)$, $z = z(g_1; g_2; g_3)$.

Величини

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g_i}\right)^2}, \ i = 1,2,3, \tag{6.1}$$

називаються ***коефіцієнтами Ламе*** для даної системи координат.

Тоді (див., наприклад [9])

$$grad\, u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial g_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial g_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial g_3}\vec{e}_3, \tag{6.2}$$

$$div\, a = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial g_1} + \frac{\partial(a_2 H_3 H_1)}{\partial g_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial g_3}\right], \tag{6.3}$$

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial g_1}\left(\frac{\partial u}{\partial g_1}\cdot\frac{H_2 H_3}{H_1}\right) + \frac{\partial}{\partial g_2}\left(\frac{\partial u}{\partial g_2}\cdot\frac{H_1 H_3}{H_2}\right) + \frac{\partial}{\partial g_3}\left(\frac{\partial u}{\partial g_3}\cdot\frac{H_1 H_2}{H_3}\right)\right]. \tag{6.4}$$

Наприклад, розглянемо циліндричну систему координат. Тут точка визначається координатами r, θ, z і $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$. Тоді, згідно (6.1), отримуємо

$$H_1 = H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 0^2} = \sqrt{1} = 1;$$

$$H_2 = H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + 0^2} = \sqrt{r^2} = r;$$

$$H_3 = H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1^2} = 1.$$

Отже, згідно (6.2)-(6.4), маємо

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\vec{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_3,$$

$$div\, a = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(a_r r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial(a_z r)}{\partial z}\right],$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot r\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot r\right)\right]$$

або $\Delta u = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot r\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

§ 6.2. Метод розділення змінних (метод Фур'є) для першої мішаної крайової задачі для однорідного хвильового рівняння в крузі

Як приклад застосування криволінійних координат розглянемо задачу вільних коливань закріпленої по краях круглої мембрани радіуса r_0. Перейдемо до полярних координат. Зауважимо, що формули переходу від декартових координат до полярних аналогічні, як і в циліндричній системі координат при відсутності вертикальної координати z. Тоді крайова задача запишеться наступним чином:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}, \tag{6.5}$$

$$u(r,\theta,0) = \varphi(r,\theta), \qquad u_t(r,\theta,0) = \psi(r,\theta), \tag{6.6}$$

$$u(r_0,\theta,t) = 0. \tag{6.7}$$

Для знаходження розв'язку крайової задачі (6.5)-(6.7) використаємо метод розділення змінних (метод Фур'є). Поклавши

$$u(r,\theta,t) = V(r,\theta)\cdot T(t) \neq 0, \tag{6.8}$$

з (6.5), (6.7) отримуємо рівняння для функції *T(t)*

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0 \tag{6.9}$$

і задачу на власні значення для функції $V(r,\theta)$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\lambda V=0 \ \left(0<r<r_0\right), \tag{6.10}$$

$$V(r_0,\theta)=0, \tag{6.11}$$

$$\left|V(0,\theta)\right|<\infty \text{ (умова обмеженості).} \tag{6.12}$$

Оскільки θ є циклічною координатою, то для однозначності функції $V(r,\theta)$ потрібно вимагати виконання умови періодичності

$$V(r,\theta)=V(r,\theta+2\pi). \tag{6.13}$$

Для відшукання функції $V(r,\theta)$ знову ж використаємо метод розділення змінних

$$V(r,\theta)=R(r)\cdot P(\theta)\neq 0.$$

Тоді, з (6.10) отримаємо

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)}{R}+\frac{P''}{P}+\lambda r^2=0. \tag{6.14}$$

З (6.11)-(6.14) приходимо до наступних задач Штурма-Ліувілля для відшукання $R(r)$ та $P(\theta)$:

$$P''+\mu^2 P=0, \tag{6.15}$$

$$P(\theta)=P(\theta+2\pi), \tag{6.16}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{r^2}\right)R=0, \tag{6.17}$$

$$R(r_0)=0, \quad \left|R(0)\right|<\infty. \tag{6.18}$$

Нетривіальні періодичні розв'язки задачі (6.15), (6.16) існують лише при $\mu^2=n^2$, де $n\in Z$. Власному значенню n^2 відповідають дві лінійно незалежні функції $\cos n\theta$ та $\sin n\theta$ (з точністю до постійних множників).

При $\mu^2=n^2$ задача Штурма-Ліувілля (6.17), (6.18) еквівалентна задачі Штурма-Ліувілля (5.5), (5.6). Тому, згідно §5.2, власні числа задачі (6.17), (6.18) мають вигляд

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2, \tag{6.19}$$

а власні функції

$$R_{n,m} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right). \tag{6.20}$$

Отже, для власного значення (6.19) ми отримали дві власні функції

$$\overline{V}_{n,m} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\cos n\theta, \;\; \overline{\overline{V}}_{n,m} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\sin n\theta .$$

Враховуючи те, що розв'язок рівняння (6.9) має вигляд

$$T(t) = C_1 \cos\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\cdot t + C_2 \sin\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\cdot t ,$$

розв'язок задачі (6.5)-(6.7) можемо записати у вигляді

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \overline{V}_{n,m}(r,\theta)\left(A_{n,m}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\cdot t + B_{n,m}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\cdot t\right) +$$

$$+\sum_{n,m=0}^{\infty} \overline{\overline{V}}_{n,m}(r,\theta)\left(C_{n,m}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\cdot t + D_{n,m}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\cdot t\right),$$

де

$$A_{n,m} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} \varphi(r,\theta) J_n\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\, r\right)\cos n\theta \, r\, dr\, d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n [J_n\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\, r_0\right)]^2},$$

$$C_{n,m} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} \varphi(r,\theta) J_n\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\, r\right)\sin n\theta \, r\, dr\, d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n [J_n\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\, r_0\right)]^2},$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n \neq 0 \\ 2, & n = 0 \end{cases}.$$

Аналогічні формули справедливі для $a\sqrt{\lambda_{n,m}}B_{n,m}$ та $a\sqrt{\lambda_{n,m}}D_{n,m}$.

РОЗДІЛ 3
РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

ТЕМА 7. Рівняння параболічного типу та фізичні задачі, що до них приводять

§ 7.1. Фізичні процеси, які приводять до рівнянь параболічного типу

До рівнянь параболічного типу найчастіше приводять фізичні задачі, пов'язані з розповсюдженням тепла та дифузією розчинених речовин.

Розглянемо металевий стержень, бічна поверхня якого теплоізольована (рис. 7.1). Теплоізольованість бічної поверхні стержня означає, що через його поверхню не відбувається теплообміну з навколишнім середовищем. Якщо цей стержень у початковому стані нерівномірно нагрітий, то завдяки теплопровідності в ньому буде відбуватися передача тепла від більш нагрітих частин до менш нагрітих.

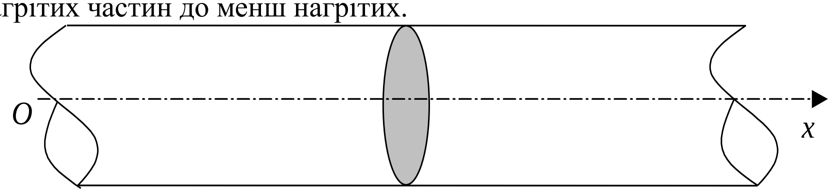

Рис. 7.1. Металевий стержень

У задачі лінійної теплопровідності стержень передбачається настільки тонким, що в будь-який момент часу температура всіх точок деякого поперечного перерізу стержня (рис. 7.1) буде однаковою. Якщо прийняти вісь стержня за вісь абсцис, то температура u буде функцією координати x та часу t. При постійному t функція $u(x,t)$ являє собою залежність температури точок стержня в даний момент часу від їхньої відстані до початку координат; частинна похідна $\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ виражає при цьому швидкість зміни температури в напрямку осі *Ox.* Якщо зафіксувати абсцису x, то $u(x,t)$ виражає закон зміни температури в даному перетині стержня з часом.

Вивід диференціального рівняння теплопровідності ґрунтується на наступних фізичних передумовах:

1. Кількість тепла, яке необхідно передати однорідному тілу, щоб підвищити його температуру на Δu, дорівнює

$$c\rho\ V\Delta u, \tag{7.1}$$

де V - об'єм тіла, ρ - його густина, c - питома теплоємність.

2. Кількість тепла, що протікає через поперечний переріз стержня за час Δt ***(тепловий потік)***, пропорційна площі поперечного перерізу, швидкості зміни температури в напрямку, перпендикулярному до перерізу, і величині проміжку часу Δt, тобто дорівнює

$$-kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t, \tag{7.2}$$

де S - площа поперечного перерізу, k - коефіцієнт теплопровідності. Знак мінус у формулі (7.2) пояснюється тим, що величину теплового потоку ми будемо вважати додатною, якщо тепло йде у бік зростання *x*. Якщо $\frac{\partial u}{\partial x} > 0,$ то це означає, що зі зростанням *x* температура підвищується, а оскільки тепло переходить від більш нагрітих ділянок до менш нагрітих, то тепловий потік буде спрямований у бік зменшення *x,* тобто його величина буде від'ємною. Будемо вважати коефіцієнт теплопровідності постійним. Це припущення справджується, якщо стержень однорідний і температура змінюється в невеликих межах.

Виділимо ділянку стержня, обмежену поперечними перерізами з абсцисами x та $(x+\Delta x)$, і складемо для неї (ділянки) рівняння ***теплового балансу***. За формулою (7.2) кількість тепла, що входить через поперечний переріз з абсцисою x за проміжок часу Δt дорівнює $-kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t.$ Якщо відкинути нескінченно малі величини вищих порядків у розкладі в ряд Тейлора функції $u(x+\Delta x,t)$, то значення частинної похідної по x в точці $(x+\Delta x)$ буде дорівнювати $\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u(x,t)+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right) = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$. Тому величина теплового потоку, що виходить через переріз з абсцисою $(x+\Delta x)$

дорівнює $-kS(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x)\Delta t.$ Взявши різницю величин вхідного і вихідного теплового потоків, ми одержимо кількість тепла $\Delta Q,$ яку отримала ділянка стержня за час Δt

$$\Delta Q=-kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t+kS(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x)\Delta t=kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t.$$

З іншої сторони, за цей же проміжок часу температура змінилася на величину $\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$ (з точністю до нескінченно малих вищого порядку). Тому, за формулою (7.1), отримана кількість тепла дорівнює

$$\Delta Q=c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$$

(об'єм V дорівнює $S\Delta x$).

Прирівнюючи отримані вирази для ΔQ і скорочуючи на загальний множник $S\Delta x\Delta t,$ маємо

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (7.3)$$

Позначивши $\frac{k}{c\rho}=a^2$, з (7.3) дістанемо основне рівняння розповсюдження тепла в однорідному стержні без теплових джерел

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (7.4)$$

Постійну $a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ називають ***коефіцієнтом температуропровідності***. Рівняння параболічного типу (7.4) є однорідним і лінійним.

Додатково припустимо, що в деяких ділянках стержня може виникати або поглинатися тепло. Тобто, всередині стержня наявні теплові джерела. Виділення (або поглинання) тепла зручно характеризувати за допомогою інтенсивності теплових джерел. Під інтенсивністю теплових джерел розуміють таку функцію $F(x,t)$, що на малій ділянці стержня $(x, x+\Delta x)$ за малий проміжок часу $(t, t+\Delta t)$ виділяється кількість тепла, рівна (з точністю до нескінченно малих вищого порядку)

$$F(x,t)\ S\Delta x\Delta t. \qquad (7.5)$$

(Якщо $F(x,t)<0$, то тепло не виділяється, а поглинається.) Наприклад, при проходженні через стержень постійного електричного струму в ньому (стержні) буде виділятися тепло, причому в даному випадку $F(x,t)=const=I^2R$, де I - величина сили (струм), а R - опір одиниці довжини стержня.

При складанні рівняння теплового балансу (7.3) треба врахувати тепло, що виникає в розглянутій ділянці стержня за рахунок джерел тепла. Для цього додамо до правої частини рівняння (7.3) величину, обумовлену формулою (7.5) і розділену на $S\Delta x\Delta t$. Отримаємо

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t).$$

Розділивши обидві частини отриманої рівності на $c\rho$ і ввівши позначення $\frac{1}{c\rho}F(x,t)=f(x,t),$ прийдемо до рівняння параболічного типу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t). \qquad (7.6)$$

Рівняння (7.6), на відміну від рівняння (7.4), є неоднорідним.

Зрозуміло, що отримані рівняння теплопровідності виведені за умови деякої ідеалізації процесу.

Розглянемо тверде однорідне ізотропне тіло, температура якого в точці (x,y,z) в момент часу t описується функцією $u=u(x,y,z,t)$. Якщо температура тіла не є сталою, то в ньому виникають теплові потоки від більш нагрітих частин до менш нагрітих. Тоді функція $u(x,y,z,t)$ задовольняє рівняння теплопровідності

$$u_t(x,y,z,t)=a^2\Delta u(x,y,z,t)+f(x,y,z,t),$$

де $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, $f(x,y,z,t) = \dfrac{F(x,y,z,t)}{c\rho}$, $F(x,y,z,t)$ - інтенсивність внутрішніх джерел тепла.

Якщо розглянемо теплові процеси в деякій однорідній тонкій пластинці з теплоізольованою бічною поверхнею, тоді температура $u = u(x,y,t)$ буде задовольняти рівняння теплопровідності в двовимірному випадку

$$u_t(x,y,t) = a^2 \Delta u(x,y,t) + f(x,y,t).$$

§ 7.2. Принцип максимуму

В площині $t = 0$ розглянемо скінчену область D, обмежену кривою L (див. рис. 7.2). Побудуємо циліндричну поверхню з направляючою L та твірною, паралельною осі Ot. Частину циліндричної поверхні, яка міститься між площинами $t = 0$ і $t = T$ (T - додатна стала) позначимо через S_T, а через D_T - проекцію області D на площину $t = T$. Область, обмежену границею $S = D \cup S_T \cup D_T$ позначимо через V_T, а $\overline{V_T} = V_T \cup S$ - замикання області V_T.

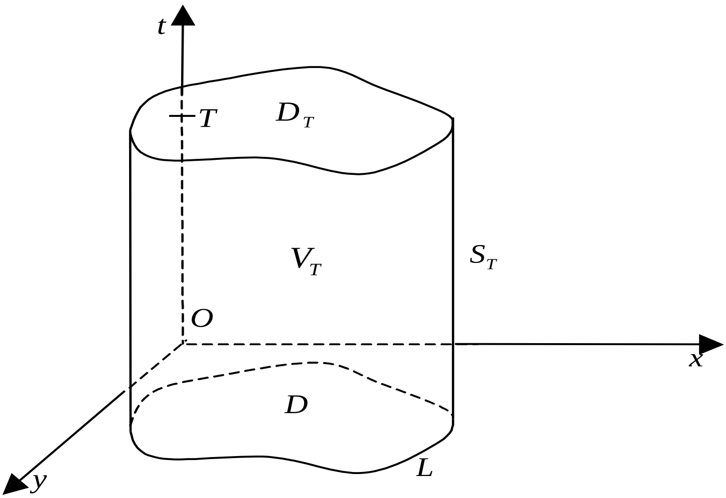

Рис. 7.2. Область V_T

Теорема 7.1. (Принцип максимуму). Нехай функція $u(x,y,t)\in C(\overline{V}_T)\cap C^{2,2,1}(V_T\cup D_T)$ задовольняє однорідне рівняння тепло- (масо)переносу

$$u_t(x,y,t)=a^2\Delta u(x,y,t)\,. \qquad (7.7)$$

Тоді максимальне та мінімальне значення в $\overline{V}_T$ функція $u(x,y,t)$ набуває на межі $S_T\cup D$.

Доведення проведемо для двох випадків.

1. Функція $u(x,y,t)=const$ задовольняє всі умови теореми, а її значення в області $\overline{V}_T$ є однаковим. Це не суперечить твердженню теореми, тому що значення функції в $\overline{V}_T$ не більше і не менше за значення функції на межі $S_T\cup D$.

2. В загальному випадку доведення достатньо провести для максимуму. Якщо функція $u(x,y,t)$ в деякій точці досягає максимуму, то функція $-u(x,y,t)$ в цій точці досягає мінімуму і для неї справедливі всі умови і твердження теореми.

Нехай

$$M=\max_{(x,y,t)\in\overline{V}_T}u(x,y,t),\; m=\max_{(x,y,t)\in S_T\cup D}u(x,y,t).$$

Очевидно, що $m\le M$. Нам потрібно довести рівність $m=M$. Припустимо, що $m<M$. Тоді в $V_T\cup D_T$ існує точка (x_0,y_0,t_0), така, що $u(x_0,y_0,t_0)=M$. Розглянемо допоміжну функцію

$$v(x,y,t)=u(x,y,t)+\frac{M-m}{2T}(t_0-t)\,.$$

Тоді

$$v(x_0,y_0,t_0)=u(x_0,y_0,t_0)+\frac{M-m}{2T}(t_0-t_0)=u(x_0,y_0,t_0)=M\,.$$

Якщо $(x,y,t)\in D\cup S_T$, то $t_0-t\le t_0\le T$ і

$$v(x,y,t)\Big|_{(x,y,t)\in S_T\cup D}\le u(x,y,t)\Big|_{(x,y,t)\in S_T\cup D}+\frac{M-m}{2T}T=m+\frac{M-m}{2}=\frac{M+m}{2}<M.$$

Отже, існує точка, яка належить $V_T\cup D_T$, в якій функція $v(x,y,t)$ приймає найбільше значення M. Позначимо дану точку через

(x_1, y_1, t_1). Припустимо спочатку, що $(x_1, y_1, t_1) \in V_T$. Тоді в даній точці для функції $v(x, y, t)$ виконуються необхідні умови максимуму

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \le 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \le 0.$$

Тоді

$$[v_t - a^2(v_{xx} + v_{yy})]_{(x_1, y_1, t_1)} \ge 0.$$

З другого боку для всіх $(x, y, t) \in \overline{V}_T$ виконується нерівність

$$[v_t - a^2(v_{xx} + v_{yy})]_{(x,y,t)\in\overline{V}_T} = [u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) - \frac{M - m}{2T}]_{(x,y,t)\in V_T} =$$

$$= -\frac{M - m}{2T} < 0.$$

Отже, ми прийшли до протиріччя.

Нехай $(x_1, y_1, t_1) \in D_T$. Це означає що $t_1 = T$, тобто t_1 є граничною точкою проміжку $(0, T]$, а точка (x_1, y_1) є внутрішньою точкою області D. Тоді в точці (x_1, y_1, t_1) виконуються наступні необхідні умови максимуму:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \ge 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \le 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \le 0.$$

Отже,

$$[v_t - a^2(v_{xx} + v_{yy})]_{(x_1, y_1, t_1)} \ge 0,$$

а вираз в квадратних дужках завжди менший нуля для всіх $(x, y, t) \in D_T$ і ми знову прийшли до протиріччя.

Отже, $m = M$ і найбільше значення функція $u(x, y, t)$ досягає в точках межі $S_T \cup D$.

Теорема 7.1 доведена.

Наслідок 7.1. Якщо функція $u(x, y, t)$ задовольняє однорідне рівняння (7.7) і виконується умова $\varepsilon_1 \le u(x, y, t) \le \varepsilon_2$ при $(x, y, t) \in S_T \cup D$, то дана нерівність справедлива для всіх $(x, y, t) \in \overline{V}_T$.

Фізичний зміст принципу максимуму очевидний. Якщо температура тіла в початковий момент часу $t=0$ і на його межі не перевищує деякого значення M, то, за відсутності внутрішніх джерел тепла, температура у внутрішній точці тіла не може перевищувати значення M .

§ 7.3. Граничні та початкові умови. Їх фізична інтерпретація

Для забезпечення єдиності розв'язку рівняння параболічного типу до нього потрібно приєднати початкові та граничні умови для шуканої функції. Початкова умова, на відміну від рівнянь гіперболічного типу, полягає в задані лише початкових значень функції в початковий момент часу $t=0$

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z), \tag{7.8}$$

де $\varphi(x,y,z)$ - відома функція.

Граничні умови можуть бути трьох родів (2.6)-(2.8).

Першого роду. Для невідомої функції на межі S області D задається відоме значення

$$u(x,y,z,t)\big|_S=\psi(x,y,z,t)\,,\ t\ge 0\,,\ (x,y,z)\in S\,, \tag{7.9}$$

де $\psi(x,y,z,t)$ - відома функція (задана температура).

Другого роду. Задається тепловий потік $\omega(x,y,z,t)$ з поверхні S

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=-\frac{1}{k}\omega(x,y,z,t)\,,\ t\ge 0,\ (x,y,z)\in S, \tag{7.10}$$

де k - коефіцієнт теплопровідності.

Третього роду. Проходить теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого дорівнює $\mu(x,y,z,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=-\lambda[u(x,y,z,t)-\mu(x,y,z,t)]\,, t\ge 0,(x,y,z)\in S\ , \tag{7.11}$$

де λ – коефіцієнт теплообміну.

ТЕМА 8. Метод розділення змінних для параболічних рівнянь

§ 8.1. Перша мішана крайова задача для одновимірного параболічного рівняння

Розв'яжемо методом розділення змінних (методом Фур'є) наступну крайову задачу:

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), t > 0, x \in (0,l), \tag{8.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in [0,l], \tag{8.2}$$

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, t \geq 0. \tag{8.3}$$

Будемо вимагати, щоб початкова та граничні умови були не суперечливі, тобто, вони задовольняють умову узгодженості

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

Розв'язок крайової задачі (8.1)-(8.3) шукаємо у вигляді

$$u(x,t) = T(t)X(t) \neq 0. \tag{8.4}$$

Підставивши (8.4) у рівняння (8.1) і граничні умови (8.3) та відокремивши змінні, отримаємо рівняння для функції $T(t)$

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \tag{8.5}$$

та задачу Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{8.6}$$

$$X(0) = 0, X(l) = 0, \tag{8.7}$$

де λ -довільна стала.

Задача (8.6),(8.7) досліджена в темі 4 (див. §4.1, задача (4.8), (4.9)). Як було показано, власними значеннями спектральної задачі (8.6), (8.7) є $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 1,2,\ldots$, *а відповідні власні функції мають вигляд*

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{8.8}$$

де $C_n = const.$

Підставивши власні значення λ_n в рівняння (8.5), одержимо

$$T_n'(t)+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T_n(t)=0\,. \qquad (8.9)$$

Інтегруючи звичайне диференціальне рівняння (8.9), маємо

$$\frac{dT_n}{dt}=-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T_n,$$

$$\frac{dT_n}{T_n}=-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 dt,$$

$$\ln\left|T_n\right|=-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t+c,$$

$$T_n(t)=B_n e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}, \qquad (8.10)$$

де $B_n=e^c=const.$

Згідно (8.4), функції $u_n\left(x,t\right)=A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x,\quad n=1,2,3,\ldots,$

де $A_n=C_n\cdot B_n$, задовольняють рівняння (8.1) та граничні умови (8.3). В силу лінійності та однорідності рівняння (8.1) сума частинних розв'язків

$$u\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (8.11)$$

також задовольняє даному рівнянню та граничним умовам (8.3). Коефіцієнти A_n вибирають так, щоб ряд (8.11) задовольняв початкову умову (8.2). Тобто,

$$u\left(x,0\right)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x=\varphi\left(x\right). \qquad (8.12)$$

Нехай $\varphi\left(x\right)\in C^1\left(0,l\right)$ і задовольняє умову узгодженості

$$\varphi\left(0\right)=\varphi\left(l\right)=0\,.$$

Тоді $\varphi\left(x\right)$ розкладається в ряд Фур'є за системою власних функцій $\sin\frac{\pi n}{l}x$ і з (8.12) отримаємо

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\,. \qquad (8.13)$$

Можна показати, що ряд (8.11), де A_n визначається за формулою (8.13), при $\varphi(x) \in C^1([0;l])$, на сегменті $(0,l)$ можна почленно диференціювати довільну кількість разів як по x, так і по t, причому він визначає неперервну функцію на $[0,l]$. Це обґрунтовує одержаний результат.

Знайдемо розв'язок неоднорідного рівняння параболічного типу

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t),\ \ t > 0,\ \ x \in (0,l), \qquad (8.14)$$

де функція $u(x,t)$ задовольняє крайовим умовам (8.2), (8.3).

Аналогічно, як і при розв'язуванні гіперболічних рівнянь (див. тема 4, §4.2), згідно принципу редукції, розв'язок задачі (8.14), (8.2),(8.3) будемо шукати у вигляді

$$u(x,t) = z(x,t) + v(x,t), \qquad (8.15)$$

де $z(x,t)$ є розв'язком задачі (8.1)-(8.3), а $v(x,t)$ є розв'язком крайової задачі

$$v_t(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t) + f(x,t), t > 0, x \in (0,l). \qquad (8.16)$$

$$v(x,0) = 0, x \in (0,l), \qquad (8.17)$$

$$v(0,t) = 0, v(l,t) = 0, t \ge 0. \qquad (8.18)$$

Згідно вищенаведених міркувань функція $z(x,t)$ подається у вигляді ряду (8.11) з коефіцієнтами (8.13).

Функцію $v(x,t)$, як розв'язок крайової задачі (8.16)-(8.18) шукаємо у вигляді

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \qquad (8.19)$$

де $X_n(x)$ є власними функціями задачі Штурма-Ліувілля (8.6), (8.7). Тобто, $X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$ (тут довільні константи покладені рівними одиниці). Ряд (8.19) задовольняє граничні умови (8.18). Потрібно вибрати функції $T_n(t)$ таким чином, щоб він також задовольняв рівняння (8.16) та початкові умови (8.17).

Припустимо, що функцію $f(x,t)$ можна розкласти в ряд Фур’є за системою власних функцій $\sin\frac{\pi n}{l}x$

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{8.20}$$

де

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi . \tag{8.21}$$

Підставляючи ряди (8.19), (8.20) у рівняння (8.16), одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x=0,$$

що можливо лише у випадку

$$T_n'(t)+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)=0, n=1,2,\ldots \tag{8.22}$$

Щоб функція $v(x,t)$ задовольняла початкову умову (8.17) потрібно вимагати

$$T_n(0)=0, n=1,2,\ldots \tag{8.23}$$

(щоб отримати (8.23) досить підставити ряд (8.19) в (8.17)).

Лінійне звичайне диференціальне рівняння першого порядку (8.22) розв'яжемо методом Бернуллі. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$T_n(t)=p(t)\cdot\omega(t).$$

Тоді з (8.22) маємо

$$p'\cdot\omega+p\cdot\omega'+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 p\cdot\omega=f_n(t),$$

$$p'\cdot\omega+p\left(\omega'+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2\omega\right)=f_n(t). \tag{8.24}$$

Функцію $\omega(t)$ виберемо з умови

$$\omega'+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2\omega=0,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \omega,$$

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 dt,$$

$$\ln|\omega| = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t + c.$$

Тоді, наприклад, можемо взяти

$$\omega = e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \qquad (8.25)$$

Враховуючи (8.25), з (8.24) маємо

$$p' \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} = f_n(t),$$

$$p' = f_n(t) e^{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t},$$

$$p(t) = \int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \tau} d\tau + c.$$

Тобто,

$$T_n(t) = \left(\int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \tau} d\tau + c\right) \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}.$$

З умови (8.23) маємо

$$T_n(0) = (0 + c) \cdot 1 = 0 \Rightarrow c = 0.$$

Тоді

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau.$$

Враховуючи вищенаведені міркування, з (8.19) отримаємо

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Отже, розв'язком першої мішаної крайової задачі для неоднорідного параболічного рівняння (8.14), (8.2), (8.3) є функція

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau\right)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

де A_n, $f_n(\tau)$ визначаються формулами (8.13), (8.21) відповідно.

Аналогічно, як і для рівнянь гіперболічного типу, мішану першу крайову задачу з неоднорідними граничними умовами $u(0,t)=\mu^{(1)}(t)$, $u(l,t)=\mu^{(2)}(t)$ можна звести до задачі з однорідними граничними умовами, але неоднорідним рівнянням.

§ 8.2. Перша мішана крайова задача для параболічного рівняння в прямокутнику

Знайдемо розв'язок крайової задачі

$$u_t(x,y,t)=a^2\left(u_{xx}(x,y,t)+u_{yy}(x,y,t)\right),\ t>0,\ 0<x<b,\ 0<y<c, \quad (8.26)$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y),\ 0\le x\le b,\ 0\le y\le c, \quad (8.27)$$

$$u(0,y,t)=u(b,y,t)=0, \quad (8.28)$$

$$u(x,0,t)=u(x,c,t)=0,\ t\ge 0. \quad (8.29)$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(x,y,t)=V(x,y)T(t)\ne 0. \quad (8.30)$$

Підставляючи (8.30) у (8.26) та граничні умови (8.28), (8.29) і розділяючи змінні, отримуємо рівняння для функції $T(t)$

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0 \quad (8.31)$$

та задачу Штурма – Ліувілля для функції $V(x,y)$

$$\begin{gathered}V_{xx}+V_{yy}+\lambda V=0,\\ V(0,y)=V(b,y)=0,\\ V(x,0)=V(x,c)=0,\lambda=const.\end{gathered} \quad (8.32)$$

Задача на власні значення (8.32) розв'язана в темі 4

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{c}\right)^2,$$

$$V_{n,m} = C_{n,m} \sin\frac{\pi n}{b} x \sin\frac{\pi m}{c} y.$$

Підставивши знайдені власні значення $\lambda_{n,m}$ у рівняння (8.31) та проінтегрувавши його, одержимо

$$T_{n,m}(t) = C^*_{n,m} e^{-a^2 \lambda_{n,m} t}.$$

Отже, частковим розв'язком рівняння (8.26), який задовольняє граничні умови (8.28), (8.29), буде

$$u_{n,m}(x,y,t) = V_{n,m}(x,y) \cdot T_{n,m}(t) =$$

$$= A_{n,m} e^{-a^2 \lambda_{n,m} t} \sin\frac{\pi n}{b} x \cdot \sin\frac{\pi m}{c} y,$$

де $A_{n,m} = C_{n,m} \cdot C^*_{n,m}$.

В силу лінійності та однорідності рівняння (8.26) сума його часткових розв'язків буде загальним розв'язком даного рівняння. Тобто,

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} e^{-a^2 \lambda_{n,m} t} \sin\frac{\pi n}{b} x \cdot \sin\frac{\pi m}{c} y.$$

Використовуючи умову (8.27), отримаємо

$$u(x,y,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \sin\frac{\pi n}{b} x \cdot \sin\frac{\pi m}{c} y = \varphi(x,y).$$

Тобто, $A_{n,m} = \frac{4}{bc}\int_0^b\int_0^c \varphi(\xi,\eta) \sin\frac{\pi n}{b}\xi \cdot \sin\frac{\pi m}{c}\eta \, d\xi \, d\eta$ - коефіцієнти розкладу функції $\varphi(x,y)$ в подвійний ряд Фур'є за системою власних функцій $V_{n,m}(x,y) = \sin\frac{\pi n}{b} x \cdot \sin\frac{\pi m}{c} y$.

§ 8.3. Перша мішана крайова задача для параболічного рівняння в крузі

Розглянемо першу мішану крайову задачу для однорідного параболічного рівняння в крузі радіуса R. Перейшовши до полярних координат, отримаємо

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \tag{8.33}$$

$$u(r,\theta,0)=\varphi(r,\theta), \tag{8.34}$$

$$u(r_0,\theta,t)=0. \tag{8.35}$$

Як видно з попереднього параграфу, розв'язок задачі такого типу можна подати у вигляді

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{n,m}^{*}e^{-a^2\lambda_{n,m}t}V_{n,m}(r,\theta), \tag{8.36}$$

де підсумовування розповсюджується на всі власні функції задачі

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\lambda V=0, V\neq 0,\\ u(r_0,\theta)=0,\\ V(r,\theta)=V(r,\theta+2\pi), |V(r,\theta)|<\infty.\end{gathered} \tag{8.37}$$

Задача (8.37) на власні значення була досліджена при вивченні коливань круглої мембрани. Кожному власному значенню $\lambda_{n,m}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2$ відповідають дві власні функції

$$\overline{V}_{n,m}=J_n\left(r\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)\cos n\theta, \quad \overline{\overline{V}}_{n,m}=J_n\left(r\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)\sin n\theta,$$

де $\mu_m^{(n)}$ - корінь рівняння $J_n(\mu)=0$. Використовуючи вирази для $V_{n,m}(r,\Theta)$ та $\lambda_{n,m}$ з (8.36), одержимо

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{n,m}\cos n\theta+B_{n,m}\sin n\theta\right)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)e^{-a^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 t},$$

де коефіцієнти $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ визначаються з початкової умови (8.34)

$$A=\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_0}\varphi(r,\theta)J_n\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\,r\right)\cos n\theta\, r dr d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\,r_0\right)\right)^2},$$

$$B=\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_0}\varphi(r,\theta)J_n\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\,r\right)\sin n\theta\, r dr d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\,r_0\right)\right)^2},$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}1, n\neq 0;\\ 2, n=0.\end{cases}$$

Практична робота №5
Метод відокремлення змінних для рівнянь параболічного типу

Приклад П5.1. Розв'язати наступну крайову задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx},\ \ t > 0,\ \ 0 < x < l, \tag{П5.1}$$

$$u(x,0) = Ax,\ \ x \in [0,l], \tag{П5.2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ \ t \ge 0\,, \tag{П5.3}$$

де $A - const$.

Розв'язання. Як відомо, розв'язком задачі

$$u_t = a^2 u_{xx},\ \ t > 0,\ \ 0 < x < l,$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ x \in [0,l],$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ \ t \ge 0\,.$$

є функція $u(x,t)$, яка подається у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

де

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi.$$

В нашому випадку

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l A\xi\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi = \frac{2A}{l}\int_0^l \xi\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi =$$

$$= \frac{2A}{l}\cdot\left(-\frac{l}{\pi n}\right)\int_0^l \xi d\left(\cos\frac{\pi n}{l}\xi\right) = -\frac{2A}{\pi n}\cdot\left(\xi\cos\frac{\pi n}{l}\xi\Big|_0^l - \int_0^l \cos\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\right) =$$

$$= -\frac{2A}{\pi n}\left(l\cdot(-1)^n - \frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\Big|_0^l\right) = (-1)^{n+1}\frac{2Al}{\pi n}.$$

Отже,

$$u(x,t)=\frac{2Al}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

<u>Відповідь</u>:

$$u(x,t)=\frac{2Al}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x$$

<u>Приклад П5.2</u>. Розв'язати наступну крайову задачу:

$$u_t=a^2u_{xx}-\beta u,\ \ t>0,\ \ 0<x<l, \tag{П5.4}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ x\in[0,l], \tag{П5.5}$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ \ t\geq 0. \tag{П5.6}$$

<u>Розв'язання</u>. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(x,t)=T(t)\cdot X(x)\not\equiv 0.$$

Тоді з рівняння (П5.4) отримуємо

$$T'X=a^2TX''-\beta TX,$$

$$\frac{T'}{T}=-a^2\frac{X''}{X}-\beta.$$

Розділяючи змінні, маємо рівняння для функції $T(t)$

$$T'+\left(a^2\lambda+\beta\right)T=0,$$

та задачу Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$

$$X''+\lambda X=0, \tag{П5.7}$$

$$X(0)=0,\ \ X(l)=0, \tag{П5.8}$$

де $\lambda - const.$

Розв'язок задачі (П5.7), (П5.8) відомий:

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,$$

$$X_n=C_n\sin\frac{\pi n}{l}x, C_n=const.$$

Підставляючи λ_n в рівняння для $T(t)$ та розв'язуючи його , знаходимо

$$T_n(t)=C_n^*e^{-\left(\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2+\beta\right)t}, C_n^*=const.$$

Отже,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2+\beta\right)t}\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

де $A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi$ знаходимо з використанням початкової умови (П5.5).

Відповідь:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2+\beta\right)t}\sin\frac{\pi n}{l}x,\;\; A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi .$$

Приклад П5.3. Розв'язати наступну крайову задачу:

$$u_t=a^2u_{xx},\;\; t>0,\;\; 0<x<l, \tag{П5.9}$$

$$u(x,0)=0,\;\; x\in[0,l], \tag{П5.10}$$

$$u(0,t)=\alpha,\;\; u(l,t)=\beta,\;\; t\geq 0, \tag{П5.11}$$

де $\alpha,\beta-const.$

Розв'язання. Щоб звести неоднорідні граничні умови (П5.11) до однорідних введемо наступну заміну:

$u(x,t)=\omega(x,t)+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{l}x,$ де $\omega(x,t)$ - нова невідома функція. Тоді

$$u_t(x,t)=\omega_t(x,t),$$

$$u_x(x,t)=\omega_x(x,t)+\frac{\beta-\alpha}{l},$$

$$u_{xx}(x,t)=\omega_{xx}(x,t),$$

$$u(x,0)=\omega(x,0)+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{l}x=0\Rightarrow\omega(x,0)=\frac{\alpha-\beta}{l}x-\alpha,$$

$$u(0,t)=\omega(0,t)+\alpha=\alpha\Rightarrow\omega(0,t)=0,$$

$$u(l,t)=\omega(l,t)+\alpha+\beta-\alpha=\omega(l,t)+\beta=\beta\Rightarrow\omega(l,t)=0.$$

Отже, маємо наступну крайову задачу для функції $\omega(x,t)$:

$$\omega_t=a^2\omega_{xx},\;\; t>0,$$

$$\omega(x,0)=\frac{\alpha-\beta}{l}x-\alpha,\;\; x\in[0,l],$$

$$\omega(0,t)=0,\quad \omega(l,t)=0,\quad t\ge 0.$$

Як відомо

$$\omega(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

де

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\left(\frac{\alpha-\beta}{l}\xi-\alpha\right)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi=$$

$$=\frac{2}{l}\left(\frac{\alpha-\beta}{l}\int_0^l\xi\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi-\alpha\int_0^l\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\left(-\frac{\alpha-\beta}{l}\frac{l}{\pi n}\int_0^l\xi d\left(\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right)-\alpha\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}\Big|_0^l\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\left(\frac{\beta-\alpha}{\pi n}\left(\xi\cos\frac{\pi n}{l}\xi\Big|_0^l-\int_0^l\cos\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\right)+\frac{\alpha l}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\left(\frac{\beta-\alpha}{\pi n}\left(l(-1)^n-\frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\Big|_0^l\right)+\frac{\alpha l}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\left(\frac{\beta-\alpha}{\pi n}l(-1)^n+\frac{\alpha l}{\pi n}(-1)^n-\frac{\alpha l}{\pi n}\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\left(\frac{\beta l}{\pi n}(-1)^n-\frac{\alpha l}{\pi n}\right)=\frac{2}{\pi n}\left(\beta(-1)^n-\alpha\right).$$

Повертаючись до проведеної заміни, маємо

$$u(x,t)=\frac{\beta-\alpha}{l}x+\alpha+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\beta(-1)^n-\alpha\right)e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

<u>Відповідь</u>:

$$u(x,t)=\frac{\beta-\alpha}{l}x+\alpha+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\beta(-1)^n-\alpha\right)e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

<u>Завдання для самостійної роботи</u>

І рівень

Розв’язати крайові задачі.

1. $u_t = 4u_{xx}$, $t > 0$, $0 < x < \pi$,

$u(x,0) = \sin x$,

$u(0,t) = u(l,t) = 0$.

2. $u_t = u_{xx} - 4u$, $t > 0$, $0 < x < \pi$,

$u(x,0) = x^2 - \pi x$,

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

3. $u_t = u_{xx}$, $t > 0$, $0 < x < 5$,

$u(x,0) = 0$,

$u(0,t) = 2t, u(5,t) = 0$.

4. $u_t = u_{xx}$, $t > 0$, $0 < x < 1$,

$u(x,0) = 1$,

$u(0,t) = 2, u(l,t) = 3$.

5. $u_t = a^2 u_{xx}$, $t > 0$, $0 < x < l$,

$$u(x,0) = \begin{cases} x, 0 < x \le l/2, \\ l - x, \; l/2 < x \le l, \end{cases}$$

$u(0,t) = u(l,t) = 0$.

II рівень

Розв’язати крайові задачі.

1. $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u$, $t > 0$, $0 < x < l$,

$u(x,0) = \varphi(x)$,

$u(0,t) = u_x(l,t) = 0$.

2. $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u$, $t > 0$, $0 < x < l$,

$u(x,0) = \varphi(x)$,

$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$.

3. $u_t = u_{xx}$, $t > 0$, $0 < x < 1$,

$u(x,0) = x^2 - 1$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

<u>ТЕМА 9.</u> Задача Коші для рівнянь параболічного типу

§9.1. Постановка задачі Коші для параболічних рівнянь

В тривимірному просторі E_3 розглянемо деяке досить велике тіло G, яке обмежене поверхнею S. Всередині даного тіла розглянемо об'єм V, який знаходиться на значній відстані від поверхні S. Протягом деякого проміжку часу температура об'єму V не буде залежати від теплового режиму на поверхні S і враховувати розміри тіла G немає потреби. В даному випадку вважаємо, що тіло G співпадає з усім простором E_3. Таким чином, приходимо до задачі Коші: у фазовому просторі $\Omega = E_3 \times (0;+\infty)$ знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$u_t(x,y,z,t) = a^2 \Delta u(x,y,z,t) + f(x,y,z,t), \tag{9.1}$$

який задовольняє початкові умови

$$u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), \ \ (x,y,z) \in E_3. \tag{9.2}$$

Тут $\varphi(x,y,z)$ - задана неперервна і обмежена функція в просторі E_3.

§9.2. Метод розділення змінних (метод Фур'є) для задачі Коші в одновимірному випадку

Знайдемо ***обмежений*** розв'язок у фазовій площині $\Omega = \{(x,t) | -\infty < x < +\infty, t > 0\}$ наступної задачі Коші:

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \ \ t > 0, \tag{9.3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \ x \in (-\infty;+\infty), \tag{9.4}$$

де $\varphi(x)$ - задана обмежена і неперервна функція.

Обмежений нетривіальний розв'язок задачі (9.3)-(9.4) шукаємо у вигляді

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0. \tag{9.5}$$

Підставивши (9.5) у (9.3) та розділивши змінні, отримаємо два рівняння

$$T'(t)+\lambda a^2 T(t)=0, \qquad (9.6)$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \qquad (9.7)$$

де λ - деяке число.

Розв'язком лінійного диференціального рівняння першого порядку (9.6) є функція [25, 40, 46]

$$T(t)=C_1\cdot e^{-\lambda a^2 t}, \qquad (9.8)$$

де $C_1=const$. Як видно з (9.8), ***обмежений*** розв'язок можливий лише у випадку коли $\lambda\ge 0$. Розв'язком лінійного диференціального рівняння другого порядку (9.7) при $\lambda\ge 0$ (див. тема 4) є функція

$$X(x)=C_2\cos\sqrt{\lambda}x+C_3\sin\sqrt{\lambda}x,$$

де C_2, C_3 - деякі константи, значення яких, взагалі кажучи, залежить від λ. Покладемо $\lambda=k^2$, $-\infty<k<+\infty$. Це ми маємо право робити, оскільки $\lambda\ge 0$. Тоді, згідно (9.5)

$$u_k(x,t)=\left(A(k)\cos kx+B(k)\sin kx\right)e^{-k^2a^2t},$$

де $A(k)=C_1\cdot C_2$, $B(k)=C_1\cdot C_3$ - деякі константи, що залежать від k. В силу лінійності та однорідності рівняння (9.3) його розв'язок можна подати у вигляді

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u_k(x,t)dk=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(A(k)\cos kx+B(k)\sin kx\right)e^{-k^2a^2t}dk. \qquad (9.9)$$

Константи $A(k)$, $B(k)$ знайдемо з початкової умови (9.4)

$$u(x,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(A(k)\cos kx+B(k)\sin kx\right)dk=\varphi(x). \qquad (9.10)$$

Подаючи функцію $\varphi(x)$ у вигляді інтеграла Фур'є

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos(k(x-\xi))d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos(k\xi)d\xi\cdot\cos(kx)+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin(k\xi)d\xi\cdot\sin(kx)\right]dk$$

і порівнюючи його з (9.10), отримаємо

$$A(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty}\varphi(\xi)\cos(k\xi)d\xi\,,\ B(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty}\varphi(\xi)\sin(k\xi)d\xi\,.$$

Зауважимо, що теорія інтегралів Фур'є є узагальненням теорії рядів Фур'є і вищенаведена формула для $\varphi(x)$ відіграє в ній фундаментальну роль (див., наприклад [7, глава 4; 16, глава 6; 33, глава 16]).

Підставляючи знайдені коефіцієнти в (9.9), одержуємо

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-k^2a^2t}\cos k(\xi-x)d\xi=\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}dk\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-k^2a^2t}\cos k(\xi-x)d\xi. \end{aligned} \tag{9.11}$$

Тут використовується парність підінтегральної функції по k. Використовуючи формулу $\int\limits_0^{+\infty} e^{k^2c^2}\cos\beta k dk=\frac{\sqrt{\pi}}{2c}\cdot e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}},\quad c\neq 0$, та змінюючи порядок інтегрування в (9.11), дістанемо

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_{0}^{+\infty} e^{-k^2a^2t}\cos k(\xi-x)dk=\\ =\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2}t}d\xi&=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2}t}d\xi. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Формула (9.12) називається ***формулою Пуассона.***

Безпосередньо перевіркою легко встановити, що функція $G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2}t}$, як функція змінних $(x,t)\in\Omega$ задовольняє рівняння теплопровідності (9.3). Дана функція називається ***фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності.***

На завершення даного параграфа покажемо, що справедлива формула $\int\limits_0^{+\infty} e^{-c^2k^2}\cos\beta k\,dk=\frac{\sqrt{\pi}}{2c}e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}}, c\neq 0,$ якою ми скористались вище. Позначимо

$$J(\beta)=\int_0^{+\infty} e^{-c^2k^2}\cos\beta k\,dk\,. \tag{9.13}$$

Диференціюючи (9.13) по β, маємо

$$\frac{dJ(\beta)}{d\beta}=-\int_0^{+\infty} e^{-c^2k^2}k\sin\beta k\,dk=\frac{1}{2c^2}\int_0^{+\infty}\sin\beta k\,dk\left(e^{-c^2k^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2c^2}\left(\sin\beta k\cdot e^{-c^2k^2}\Big|_0^{+\infty}-\beta\int_0^{+\infty} e^{-c^2k^2}\cos\beta k\,dk\right)=$$

$$=\frac{1}{2c^2}\left(\lim_{k\to+\infty}\frac{\sin\beta k}{e^{c^2k^2}}-\beta J(\beta)\right)=-\frac{\beta}{2c^2}J(\beta)\,.$$

Отже, маємо диференціальне рівняння

$$\frac{dJ(\beta)}{J(\beta)}=-\frac{\beta}{2c^2}d\beta\,.$$

Розв’язуємо його

$$\ln\left|J(\beta)\right|=-\frac{\beta^2}{4c^2}+C_1,$$

$$J(\beta)=C_2e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}},\ \text{де}\ C_2=e^{C_1}\,.$$

Оскільки $J(0)=\int_0^{+\infty} e^{-c^2k^2}dk=\frac{\sqrt{\pi}}{2c}$, то $c_2=\frac{\sqrt{\pi}}{2c}$ і $J(\beta)=\frac{\sqrt{\pi}}{2c}e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}}$.

§9.3. Задача Коші в n-вимірному просторі

У випадку n - вимірного простору E_n фундаментальним розв’язком однорідного рівняння теплопровідності буде функція

$$G(P,Q,t)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-\frac{r^2}{4a^2}t},$$

де $P=(x_1,x_2,...,x_n)$, $Q=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$, $r=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2}$, а розв'язком задачі Коші

$$u_t(P,t) = a^2 \Delta u(P,t), \quad (P,t) \in E_n \times (0;+\infty),$$
$$u(P,0) = \varphi(P), \qquad P \in E_n,$$

в класі обмежених функцій є

$$u(P,t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n} \varphi(Q)\ G(P,Q,t) d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n .$$

Розв'язок задачі Коші

$$u_t(P,t) = a^2 \Delta u(P,t) + f(P,t), \quad (P,t) \in \Omega = E_n \times (0;+\infty),$$
$$u(P,0) = \varphi(P), \quad P \in E_n,$$

де функції $f(P,t)$ та $\varphi(P)$ є неперервними та обмеженими, набуває вигляду

$$u(P,t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n} \varphi(Q)\ G(P,Q,t) d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n +$$
$$+ \int_0^t \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n} f(Q,\tau)\ G(P,Q,t-\tau) d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n d\tau.$$

Практична робота №6
Задача Коші для рівнянь параболічного типу

Приклад П6.1. Нехай $\Delta f(X,t) \equiv 0$ для будь-якого $X \in E_n$ при кожному фіксованому $t \geq 0$. Довести , що функція

$$u(X,t) = \int_0^t f(X,\tau)d\tau$$

є розв'язком задачі Коші:

$$u_t = a^2 \Delta u + f(X,t),$$

$$u\big|_{t=0} = 0.$$

Доведення. Безпосередньою перевіркою переконаємось в справедливості твердження. Очевидно , що

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t f(X,\tau)d\tau\right) = f(X,t), \;\; \Delta u = \int_0^t \Delta f(X,\tau)d\tau = 0 .$$

Отже

$$u_t - a^2 \Delta u = f(X,t) - a^2 \cdot 0 = f(X,t).$$

Крім того

$$u\big|_{t=0} = \left(\int_0^t f(X,\tau)d\tau\right)\Bigg|_{t=0} = 0.$$

Приклад П6.2. Розв'язати задачу Коші:

$$u_t = 4u_{xx} + t + e^t,$$

$$u(x,0) = 2.$$

Розв'язання. Скористаємось результатами прикладу П6.1. Зведемо початкову умову до однорідної. Для цього введемо заміну $u(x,t) = \omega(x,t) + 2,$ де $\omega(x,t)$ - нова невідома функція. Тоді для функції $\omega(x,t)$ отримуємо наступну крайову задачу

$$\omega_t = 4\omega_{xx} + t + e^t,$$

$$\omega(x,0) = 0.$$

Тут $f(x,t)=t+e^t$ *і* $\Delta f(x,t)=f_{xx}=0.$ Тому, згідно прикладу П6.1,

$$\omega(x,t)=\int_0^t\left(\tau+e^{\tau}\right)d\tau=\frac{t^2}{2}+e^t-1.$$

Повертаючись до проведеної заміни, маємо

$$u(x,t)=\omega(x,t)+2=1+\frac{t^2}{2}+e^t.$$

Відповідь:

$$u(x,t)=1+\frac{t^2}{2}+e^t.$$

Приклад П6.3. Показати, що функція $u(X,t), X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, визначена як сума ряду

$$u(X,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}t^k}{k!}\Delta^k u_0(X), \qquad (П6.1)$$

який допускає почленне диференціювання потрібне число разів, є розв’язком задачі Коші

$$u_t=a^2\Delta u,$$

$$u\big|_{t=0}=u_0(X).$$

Тут $\Delta^0 u=u,\ \Delta^1 u=\Delta u,\ \Delta^2 u=\Delta\left(\Delta^1 u\right),\ \Delta^k u=\Delta\left(\Delta^{k-1}u\right).$

Розв’язання. Очевидно, що

$$u(X,t)\big|_{t=0}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}t^k}{k!}\Delta^k u_0(X)\right)\Bigg|_{t=0}=u_0(X).$$

При виконанні умов, які гарантують рівномірну збіжність ряду (П6.1) та рядів, які отримані з нього почленним диференціюванням один раз по t і двічі по X, для суми $u(X,t)$ даного ряду, отримуємо

$$a^2\Delta u-u_t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2(k+1)}t^k}{k!}\Delta^{k+1}u_0(X)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{2k}t^{k-1}}{(k-1)!}\Delta^k u_0(X)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2(k+1)}t^k}{k!}\Delta^{k+1}u_0(X)-\sum_{s=0}^{\infty}\frac{a^{2(s+1)}t^s}{s!}\Delta^{s+1}u_0(X)=0.$$

(в другому ряді ми поклали $s=k-1$).

<u>Приклад П6.4</u>. Розв'язати задачу Коші

$$u_t = u_{xx} + 3t^2,$$

$$u\big|_{t=0} = \sin x.$$

<u>Розв'язання</u>. Проведемо редукцію даної задачі. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t),$$

де $v(x,t)$ є роз'язком задачі Коші

$$v_t = v_{xx} + 3t^2,$$

$$v\big|_{t=0} = 0,$$

а $\omega(x,t)$ є роз'язком задачі

$$\omega_t = \omega_{xx},$$

$$\omega\big|_{t=0} = \sin x.$$

Згідно прикладу П6.1, маємо

$$v(x,t) = \int_0^t 3\tau^2 d\tau = t^3.$$

Згідно прикладу П6.3, дістанемо

$$\omega(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Delta^k \sin x = \sin x - \frac{t^1}{1!} \sin x + \frac{t^2}{2!} \sin x - \frac{t^3}{3!} \sin x + \cdots =$$

$$= \sin x \left(1 - \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots \right) = \sin x \cdot e^{-t}.$$

Отже,

$$u(x,t) = t^3 + \sin x \cdot e^{-t}.$$

<u>Відповідь</u>:

$$u(x,t) = t^3 + \sin x \cdot e^{-t}.$$

<u>Приклад П6.5</u>. Нехай $u_k(x_k,t)$, $k = \overline{1,n}$, - розв'язки наступних задач Коші:

$$u_t = a^2 \Delta u,$$

$$u\big|_{t=0} = f_k(x_k), k = \overline{1,n}.$$

Довести, що функція

$$u(X,t)=\prod_{k=1}^{n}u_k(x_k,t)$$

є розв'язком задачі Коші

$$u_t=a^2\Delta u,$$

$$u\Big|_{t=0}=\prod_{k=1}^{n}f_k(x_k),$$

де $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Доведення. Очевидно , що

$$u(X,t)\Big|_{t=0}=\prod_{k=1}^{n}u_k(x_k,t)\Big|_{t=0}=\prod_{k=1}^{n}f_k(x_k),$$

тобто початкова умова виконується. Аналогічно, за допомогою безпосередньої перевірки, маємо

$$u_t(X,t)-a^2\Delta u(X,t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}(u_i(x_i,t))\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}u_k(x_k,t)-a^2\sum_{i=1}^{n}\Delta u_i(x_i,t)\times$$

$$\times\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}u_k(x_k,t)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial t}(u_i(x_i,t))-a^2\Delta u_i(x_i,t)\right]\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}u_k(x_k,t)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}u_k(x_n,t)=0.$$

Приклад П6.6. Розв'язати задачу Коші

$$u_t=u_{xx}+u_{yy}+e^t,$$

$$u\Big|_{t=0}=\cos x\cdot\sin y.$$

Розв'язання. Проведемо редукцію даної задачі Коші. Розв'язок шукаємо у вигляді $u(x,y,t)=v(x,y,t)+\omega(x,y,t)$, де $v(x,y,t)$ є розв'язком задачі

$$v_t=\Delta v+e^t,$$

$$v\Big|_{t=0}=0,$$

а $\omega(x, y, t)$ є розв'язком задачі

$$\omega_t = \Delta\omega,$$
$$\omega\big|_{t=0} = \sin x \cos y.$$

Згідно прикладу П6.1, дістанемо

$$v(x, y, t) = \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^t - 1,$$

а $\omega(x, y, t)$ шукаємо у вигляді

$$\omega(x, y, t) = \omega_1(x, t) \cdot \omega_2(y, t),$$

де, згідно прикладу П6.5, $\omega_1(x, t)$ є розв'язком задачі

$$(\omega_1)_t = \Delta\omega_1,$$
$$\omega_1\big|_{t=0} = \cos x,$$

а $\omega_2(y, t)$ є розв'язком задачі

$$(\omega_2)_t = \Delta\omega_2,$$
$$\omega_2\big|_{t=0} = \sin y.$$

Задача на відшукання функції $\omega_2(y, t)$ розв'язана в прикладі П6.4 і

$$\omega_2(y, t) = \sin y \cdot e^{-t}.$$

Аналогічно, згідно прикладу П6.3, дістанемо

$$\omega_1(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Delta^k \cos x = \cos x - \frac{t}{1!} \cos x + \frac{t^2}{2!} \cos x - \frac{t^3}{3!} \cos x + \cdots =$$
$$= \cos x \left(1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \ldots \right) = \cos x \cdot e^{-t}.$$

Отже:

$$u(x, y, t) = e^t - 1 + \omega_1(x, t) \cdot \omega_2(y, t) = e^t - 1 + e^{-2t} \sin y \cdot \cos x.$$

Відповідь:

$$u(x, y, t) = e^t - 1 + e^{-2t} \sin y \cdot \cos x.$$

Завдання для самостійної роботи

І рівень

Розв'язати задачу Коші.

1. $u_t = u_{xx} + arctg\ t$,
$u(x,0) = 3$.

2. $u_t = u_{xx}$,
$u(x,0) = \sin 2x$.

3. $u_t = u_{xx} + t \sin t$,
$u(x,0) = e^x$.

4. $u_t = u_{xx} + \cos t$,
$u(x,0) = e^{-x}$.

5. $u_t = u_{xx} + u_{yy} + e^y \sin t \sin x$,
$u(x,y,0) = 1$.

II рівень

Розв'язати задачу Коші

1. $u_t = u_{xx} + u_{yy} + xye^{-t}$,
$u(x,y,0) = bx \sin y$.

2. $u_t = \Delta u + \cos t$,
$u(x,y,0) = xye^{-x-y}$.

3. $u_t = a^2 \Delta u + e^{y-t} \sin x$,
$u(x,y,0) = \sin(x-y)$.

<u>ТЕМА 10.</u> Єдиність та стійкість розв’язків крайових задач для рівнянь параболічного типу

§10.1. Єдиність та стійкість розв’язків мішаних крайових задач

Розглянемо в тривимірному просторі E_3 деякий об’єм V обмежений достатньо гладкою поверхнею S. Розглянемо першу мішану крайову задачу для рівняння параболічного типу

$$u_t(P,t) = a^2 \Delta u(P,t) + f(P,t), \quad (P,t) \in \Omega = V \times (0;+\infty), \tag{10.1}$$

$$u(P,0) = \varphi(P), \quad P \in V, \tag{10.2}$$

$$u(P,t)\big|_{P\in S} = \psi(P,t), \quad P \in S,\ t \ge 0, \tag{10.3}$$

де $P = (x, y, z)$ - точка тривимірного простору; $\varphi(P)$ та $\psi(P,t)$ - задані функції.

При постановці крайових задач вважатимемо, що початкові та граничні умови не суперечливі. Тобто, у випадку першої мішаної крайової задачі виконуються умови узгодження

$$\varphi(P)\big|_{P\in S} = \psi(P,0),\ P \in S.$$

Теорема 10.1. В класі функцій $C(\overline{\Omega}) \cap C^{(2,2,2,1)}(\Omega)$ розв’язок задачі (10.1)-(10.3) єдиний і неперервно залежить від початкових та граничних даних.

Доведення. Припустимо, що існує два розв’язки крайової задачі (10.1)-(10.3) $u_1(P,t)$ та $u_2(P,t)$. Тобто, мають місце наступні співвідношення:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \Delta u_1(P,t) + f(P,t), (P,t) \in \Omega, \tag{10.4}$$

$$u_1(P,0) = \varphi(P), P \in V, \tag{10.5}$$

$$u_1(P,t)\big|_{P\in S} = \psi(P,t), P \in S, t \ge 0, \tag{10.6}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \Delta u_2(P,t) + f(P,t), (P,t) \in \Omega, \tag{10.7}$$

$$u_2(P,0) = \varphi(P), P \in V, \tag{10.8}$$

$$u_2(P,t)\big|_{P\in S} = \psi(P,t), P \in S, t \ge 0. \tag{10.9}$$

Тоді, віднімаючи почленно рівняння (10.4), (10.7), початкові умови (10.5), (10.8), граничні умови (10.6), (10.9) отримаємо, що функція $u(P,t)=u_1(P,t)-u_2(P,t)$ є розв'язком крайової задачі

$$u_t(P,t)=a^2\Delta u(P,t),\ (P,t)\in\Omega=V\times(0;+\infty), \qquad (10.10)$$

$$u(P,0)=0,\ P\in V, \qquad (10.11)$$

$$u(P,t)\big|_{P\in S}=0,\ P\in S,\ t\ge 0. \qquad (10.12)$$

Згідно принципу максимуму (див. тема 7, теорема 7.1) маємо, що при $(P,t)\in\overline{\Omega}$ $u(P,t)\equiv 0$. Отже, $u_1(P,t)\equiv u_2(P,t)$. Єдиність доведена.

Нехай функції $u_1(P,t)$ та $u_2(P,t)$ є розв'язками рівняння (10.1) і виконуються наступні умови:

$$|u_1(P,0)-u_2(P,0)|<\varepsilon,\ P\in V,$$

$$|u_1(P,t)-u_2(P,t)|\Big|_{P\in S}<\varepsilon,\ t\ge 0.$$

Покажемо, що $|u_1(P,t)-u_2(P,t)|<\varepsilon$ для довільних $(P,t)\in\overline{\Omega}$. Функція $u(P,t)=u_1(P,t)-u_2(P,t)$ є розв'язком однорідного рівняння теплопровідності (10.10) і для неї виконуються умови

$$-\varepsilon<u(P,0)<\varepsilon,\ P\in V;$$

$$-\varepsilon<u(P,t)\Big|_{P\in S}<\varepsilon,\ t\ge 0.$$

Тоді, згідно наслідку з принципу максимуму (див. §7.2) при всіх $(P,t)\in\overline{\Omega}$ буде виконуватися нерівність

$$-\varepsilon<u(P,t)<\varepsilon.$$

Отже, $|u(P,t)|<\varepsilon \Rightarrow |u_1(P,t)-u_2(P,t)|<\varepsilon$, що і треба було довести.

Теорема 10.1 доведена.

Розглянемо граничні умови другого та третього роду

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{P\in S}=-\frac{1}{k}\omega(P,t),\ k>0, P\in S,\ t\ge 0; \qquad (10.13)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P\in S} = -\lambda\left[u(P,t) - \mu(P,t)\right],\ \lambda \geq 0,\ P \in S\ ,\ t \geq 0\ , \qquad (10.14)$$

де функції $\omega(P,t)$ та $\mu(P,t)$ - задані; k - коефіцієнт теплопровідності; λ - коефіцієнт теплообміну.

Теорема 10.2. В класі функцій $C^{(1,1,1,0)}(\overline{\Omega}) \cap C^{(2,2,2,1)}(\Omega)$ розв'язок другої (10.1), (10.2), (10.13) та третьої (10.1), (10.2), (10.14) мішаних крайових задач єдиний.

Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки відповідних крайових задач $u_1(P,t)$ та $u_2(P,t)$. Тоді функція $u(P,t) = u_1(P,t) - u_2(P,t)$ буде задовольняти однорідне рівняння (10.10), однорідну початкову умову (10.11) та наступну однорідну граничну умову другого (третього) роду:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P\in S} = 0\ \left(\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P\in S} = -\lambda u(P,t)\right),\ P \in S\ ,\ t \geq 0\ . \qquad (10.15)$$

Розглянемо функцію

$$I(t) = \frac{1}{2}\iiint\limits_V u^2 dxdydz \geq 0\ . \qquad (10.16)$$

Тоді $\dfrac{dI}{dt} = \iiint\limits_V u\dfrac{\partial u}{\partial t}dxdydz = a^2\iiint\limits_V u\Delta u dxdydz$. Згідно формули Остроградського-Гаусса

$$\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS = \iiint\limits_V u\Delta u dxdydz + \iiint\limits_V \left[u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right]dxdydz.$$

Тоді

$$\frac{dI}{dt} = a^2\left(\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS - \iiint\limits_v \left[u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right]dxdydz\right). \qquad (10.17)$$

Згідно умови (10.15) перший інтеграл в правій частині (10.17) дорівнює нулю у випадку граничної умови другого роду або менший нуля у випадку граничної умови третього роду. Отже, $\dfrac{dI}{dt} \leq 0$. Але, згідно (10.11) маємо $I(0) = 0$. Отже, функція $I(t)$ є невід'ємною, не зростаючою при t≥ 0 і при $t = 0$ дорівнює нулю. Тому $I(t) \equiv 0$ при

$t \ge 0$. Тобто $u(P,t) \equiv 0$, $(P,t) \in \overline{\Omega}$. Отже, $u_1(P,t) \equiv u_2(P,t)$, що й потрібно було довести.
Теорема 10.2 доведена.

§ 10.2. Єдиність розв'язку задачі Коші

У фазовому просторі $\Omega = \mathrm{E}_3 \times (0;+\infty)$ розглянемо задачу Коші для рівняння параболічного типу

$$u_t(P,t) = a^2 \Delta u(P,t) + f(P,t),\ (P,t) \in \Omega, \tag{10.18}$$

$$u(P,0) = \varphi(P),\ P \in \mathrm{E}_3, \tag{10.19}$$

де $\varphi(P)$, $f(P,t)$ – відомі неперервні та обмежені функції в просторах E_3 та Ω відповідно.
Теорема 10.3. В класі обмежених у всьому фазовому просторі Ω функцій розв'язок задачі Коші (10.18), (10.19) єдиний.
Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки задачі (10.18), (10.19) $u_1(P,t)$ та $u_2(P,t)$. Повторюючи міркування теореми 10.1, отримаємо, що функція $u(P,t) = u_1(P,t) - u_2(P,t)$ буде розв'язком наступної задачі Коші:

$$u_t(P,t) = a^2 \Delta u(P,t),\ (P,t) \in \Omega, \tag{10.20}$$

$$u(P,0) = 0,\ P \in \mathrm{E}_3. \tag{10.21}$$

Згідно умов теореми існує константа $M \ge 0$ така, що

$$|u_1(P,t)| \le M\ ,\ |u_2(P,t)| \le M\ ,\ (P,t) \in \overline{\Omega}.$$

Тоді

$$|u(P,t)| = |u_1(P,t) - u_2(P,t)| \le |u_1(P,t)| + |u_2(P,t)| \le 2M\ .$$

Розглянемо допоміжну функцію

$$\upsilon(P,t) = \frac{4M}{\ell^2}\left(\frac{1}{2}r^2 + 3a^2 t\right),$$

де $\ell = const$; $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Безпосередньою перевіркою легко переконатись, що функція $\upsilon(P,t)$ задовольняє рівняння (10.20), причому

$$\upsilon(P,0) = \frac{2M}{\ell^2} r^2 \ge 0 = u(P,0) \Rightarrow \upsilon(P,0) \ge u(P,0),\ P \in \mathrm{E}_3.$$

При $r^2 = \ell^2$ маємо $\upsilon(P,t) = 2M + \frac{12M}{\ell^2} a^2 t \ge 2M \ge |u(P,t)|$, тобто $\upsilon(P,t) \ge |u(P,t)|$. Отже,

$$-\upsilon(P,t) \le u(P,t) \le \upsilon(P,t).$$

Тоді, на основі принципу максимуму, нерівність

$$-\frac{4M}{\ell^2}\left(\frac{1}{2}r^2 + 3a^2 t\right) \le u(P,t) \le \frac{4M}{\ell^2}\left(\frac{1}{2}r^2 + 3a^2 t\right) \quad (10.22)$$

буде виконуватись при $t \ge 0$ і $r^2 \le \ell^2$. Зафіксуємо деяку точку $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ та t_0 і перейдемо до границі в (10.22) при $\ell \to \infty$. Отримаємо

$$u(P_0, t_0) = 0.$$

В силу довільності точки (P_0, t_0) остання рівність виконується тотожно при всіх $(P,t) \in \overline{\Omega}$. Тобто, $u_1(P,t) \equiv u_2(P,t)$.

Теорема 10.3 доведена.

§10.3. Неперервна залежність розв'язку задачі Коші від початкових умов та інтенсивності внутрішніх джерел тепла

Нехай функція $u_1(P,t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \Delta u_1(P,t) + f_1(P,t), (P,t) \in \Omega, \quad (10.23)$$

$$u_1(P,0) = \varphi_1(P), P \in \mathrm{E}_3,$$

а функція $u_2(P,t)$ - це розв'язок наступної задачі Коші:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \Delta u_2(P,t) + f_2(P,t), (P,t) \in \Omega, \quad (10.24)$$

$$u_2(P,0) = \varphi_2(P), P \in \mathrm{E}_3.$$

Тут функції $f_i(P,t)$, $\varphi_i(P)$, $i = 1, 2$ є відомими та обмеженими.

Теорема 10.4. Розв'язок задачі Коші для рівняння параболічного типу неперервно залежить від початкових умов та інтенсивності внутрішніх джерел тепла. Тобто, $\forall \varepsilon > 0$, $0 < t \le T$, $\exists \delta > 0$, що як тільки $|f_1(P,t) - f_2(P,t)| < \delta$, $(P,t) \in \Omega$ і $|\varphi_1(P) - \varphi_2(P)| < \delta$, $P \in E_3$, то

$$|u_1(P,t) - u_2(P,t)| < \varepsilon .$$

Доведення. Можна показати, що

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} G(P,Q,t)dQ = 1,$$

де $G(P,Q,t)$ – фундаментальний розв'язок однорідного рівняння теплопровідності (див. тема 9). Тоді отримуємо

$$|u_1(P,t) - u_2(P,t)| \le \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} G(P,Q,t) \cdot |\varphi_1(Q) - \varphi_2(Q)| dQ +$$

$$+ \int\limits_0^t \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} G(P,Q,t-\tau) |f_1(Q,\tau) - f_2(Q,\tau)| dQ d\tau < \delta \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} G(P,Q,t)dQ +$$

$$+ \delta \int\limits_0^t \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} G(P,Q,t-\tau) dQ d\tau = \delta \cdot 1 + \delta \cdot \int\limits_0^t d\tau = \delta(1+t) \le \delta(1+T).$$

Отже, поклавши в останній нерівності $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+T}$, отримуємо

$$|u_1(P,t) - u_2(P,t)| < \varepsilon .$$

Теорема 10.4 доведена.

РОЗДІЛ 4
РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

<u>ТЕМА 11.</u> Еліптичні рівняння та фізичні процеси, які до них приводять

§ 11.1. Фізичні процеси, що приводять до рівнянь еліптичного типу

При вивченні параболічних рівнянь ми показали, що процес розподілу тепла в деякому тілі G описується рівнянням теплопровідності

$$u_t(x,y,z,t) = a^2 \Delta u(x,y,z,t) + f(x,y,z,t).$$

Якщо припустити, що процес розподілу тепла є стаціонарним, тобто $u = u(x,y,z)$, а інтенсивність внутрішніх джерел тепла f теж не залежить від часу, то ми отримуємо рівняння еліптичного типу

$$\Delta u = f_1(x,y,z),$$

де $f_1(x,y,z) = -\dfrac{f(x,y,z)}{a^2}$.

Розглянемо потік нестисливої рідини з густиною $\rho = const$. Позначимо через $\vec{\upsilon}(x,y,z)$ вектор-функцію швидкості руху даної рідини. Припустимо, що поле $\vec{\upsilon}$ є потенціальним, тобто $\vec{\upsilon}(x,y,z) = -grad u(x,y,z)$, де $u(x,y,z)$ – потенціальна функція потоку рідини. Тоді можна показати (див., наприклад, [34, 36, 49]), що функція $u(x,y,z)$ буде задовольняти рівняння еліптичного типу

$$\Delta u = -\frac{f(x,y,z)}{\rho},$$

де $f(x,y,z)$ - інтенсивність внутрішніх джерел рідини.

§11.2. Постановка крайових задач для еліптичних рівнянь

Рівняння виду

$$\Delta u = f \, , \tag{11.1}$$

де f – деяка задана функція (в загальному випадку залежить від n змінних) називається ***рівнянням Пуассона.***

Рівняння виду

$$\Delta u = 0 \tag{11.2}$$

називається ***рівнянням Лапласа.***

Розглянемо деяку область G n-вимірного простору, обмежену поверхнею S. Поставимо задачу: знайти розв'язок рівняння (11.1), який задовольняє одну з граничних умов

$$u\,|_s = \varphi\,; \tag{11.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\,|_s = \psi\,; \tag{11.4}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h[u - \omega]\right)|_s = 0\,; \tag{11.5}$$

де $\varphi,\ \psi,\ h,\ \omega$ - відомі функції n змінних; тут $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - похідна по зовнішній нормалі до межі S.

Задача (11.1), (11.3) називається ***першою крайовою задачею для рівняння еліптичного типу*** або ***задачею Діріхле.***

Задача (11.1), (11.4) називається ***другою крайовою задачею для рівняння еліптичного типу*** або ***задачею Неймана.***

Задача (11.1), (11.5) називається ***третьою крайовою задачею для рівняння еліптичного типу***.

§11.3. Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа

Розглянемо функцію

$$\Omega(M,\,P)=\begin{cases}-\dfrac{r^{2-n}}{2-n}, & n>2;\\ -\ln r, & n=2.\end{cases} \tag{11.6}$$

Тут $M\left(x_1, x_2,\ldots,x_n\right)$, $P\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\right), r=\left|\overrightarrow{PM}\right|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\xi_i\right)^2}$.

Покажемо, що функція (11.6) задовольняє рівняння Лапласа (11.2). Маємо

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_i}=-r^{1-n}\,\frac{1}{2r}\,2\left(x_i-\xi_i\right)=-\frac{\left(x_i-\xi_i\right)}{r^n};$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_i^2}=-\frac{1}{r^n}+n\left(x_i-\xi_i\right)r^{-n-1}\,\frac{1}{2r}\,2\left(x_i-\xi_i\right)=-\frac{1}{r^n}+n\frac{\left(x_i-\xi_i\right)^2}{r^{n+2}};$$

$$\Delta\Omega=\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_n^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_i^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(n\frac{\left(x_i-\xi_i\right)^2}{r^{n+2}}-\frac{1}{r^n}\right)=$$

$$=n\frac{r^2}{r^{n+2}}-n\frac{1}{r^n}=\frac{n}{r^n}-\frac{n}{r^n}=0.$$

Отже, функція $\Omega(M,P)$ задовольняє рівняння Лапласа як функція точки $M(x_1, x_2,\ldots,x_n)$. Оскільки $\Omega(M,\,P)$ є симетричною відносно точок M і P, то можна показати, що вона також задовольняє рівняння Лапласа як функція точки $P\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\right)$.

Функція $\Omega(M,P)$, визначена формулою (11.6), називається ***елементарним*** або ***фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа.***

ТЕМА 12. Принцип максимуму та коректність крайових задач для рівнянь еліптичного типу

§12.1. Принцип максимуму та його наслідки

Функція $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається ***гармонічною в обмеженій області*** D, якщо вона двічі неперервно диференційована в цій області по кожній змінній і є розв'язком рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{12.1}$$

Функція $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається ***гармонічною в необмеженій області*** D, якщо в усіх точках даної області, які знаходяться на скінченній відстані від початку координат, вона є двічі неперервно диференційовною по кожній змінній, задовольняє рівняння Лапласа (12.1) і для досить великих $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ виконується умова регулярності на нескінченності

$$\left|u(x_1, x_2, ..., x_n)\right| \le \frac{c}{r^{n-2}}, \tag{12.2}$$

де c – деяка додатна константа.

Розглянемо деяку область D, обмежену кусково-гладкою поверхнею S. Нехай D^* - доповнює область D до всього простору. Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу всередині області D називаються внутрішніми. Аналогічно ставляться крайові задачі для еліптичних рівнянь у випадку необмеженої області D^*. Лише вимагається виконання умови регулярності на нескінченності (12.2). Такі крайові задачі називаються ***зовнішніми***.

Теорема 12.1 (принцип максимуму). Гармонічна в обмеженій області D і неперервна в $\overline{D} = D \cup S$ функція досягає свого найбільшого та найменшого значення на межі S даної області.

Доведення проведемо для тривимірного випадку. Позначимо через m найбільше значення гармонічної функції $u(x, y, z)$ на межі S області D. Припустимо, що існує точка $(x_0, y_0, z_0) \in D$, в якій функція приймає значення $M > m$. Тобто, $u(x_0, y_0, z_0) = M > m$. Розглянемо допоміжну функцію

$$\upsilon(x, y, z) = u(x, y, z) + \frac{M - m}{2d^2} r_0^2,$$

де d – діаметр області D; $r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

Оскільки $r_0^2 \le d^2$, то функція $\upsilon(x, y, z)$ на поверхні S задовольняє нерівності

$$\upsilon(x, y, z) \le m + \frac{M - m}{2d^2} d^2 \le m + \frac{M - m}{2} = \frac{M + m}{2} < M.$$

З іншого боку $\upsilon(x_0, y_0, z_0) = u(x_0, y_0, z_0) = M$. Отже, функція $\upsilon(x, y, z)$ свого найбільшого значення досягає в деякій внутрішній точці області D. Нехай цією точкою буде $(x_1, y_1, z_1) \in D.$ Тоді в точці (x_1, y_1, z_1) виконуються наступні умови:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \frac{\partial \upsilon}{\partial z} = 0, \ \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} \le 0, \ \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2} \le 0, \ \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2} \le 0.$$

Отже, $\Delta \upsilon(x, y, z) \le 0$. Але, з іншого боку, в будь-якій точці $(x, y, z) \in D$

$$\Delta \upsilon(x, y, z) = \Delta u(x, y, z) + \frac{M - m}{2d^2} \Delta r_0^2 = 0 + \frac{M - m}{2d^2} \cdot 6 = 3\frac{M - m}{d^2} > 0$$

для всіх $(x, y, z) \in D$, в тому числі і для точки $(x_1, y_1, z_1).$ Отримали протиріччя, яке доводить, що максимум функція $u(x, y, z)$ досягає на межі S області D.

Щоб довести аналогічне твердження для мінімуму, достатньо застосувати вищенаведені результати для гармонічної функції $-u(x, y, z)$.

Теорема 12.1 доведена.

Наслідок 12.1. Нехай функції $u(x, y, z)$ та $\upsilon(x, y, z)$ є гармонічними в обмеженій області D і неперервними в її замиканні $\overline{D} = D \cup S$. Якщо при $(x, y, z) \in S$ виконується нерівність $u(x, y, z) \le \upsilon(x, y, z)$, то дана нерівність справедлива при всіх $(x, y, z) \in D$.

Наслідок 12.2. Нехай функції $u(x,y,z)$ та $\upsilon(x,y,z)$ є гармонічними в обмеженій області D і неперервними в $\overline{D}$. Якщо при $(x,y,z)\in S$ $|u(x,y,z)|\le \upsilon(x,y,z)$, то дана нерівність має місце при всіх $(x,y,z)\in D$.

§12.2. Єдиність та неперервна залежність від граничних умов розв'язку задачі Діріхле

В обмеженій області D з кусково-гладкою границею S розглянемо задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta u(x,y,z)=f(x,y,z), \tag{12.3}$$

$$u(x,y,z)\Big|_S=\varphi(x,y,z),\ \ (x,y,z)\in S. \tag{12.4}$$

Теорема 12.2 Якщо розв'язок задачі (12.3), (12.4) існує, то він єдиний.
Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки задачі (12.3), (12.4): $u_1(x,y,z)$ та $u_2(x,y,z)$. Тобто, справедливі наступні рівності:

$$\Delta u_1(x,y,z)=f(x,y,z), \tag{12.5}$$

$$u_1(x,y,z)\Big|_S=\varphi(x,y,z),\ \ (x,y,z)\in S; \tag{12.6}$$

$$\Delta u_2(x,y,z)=f(x,y,z), \tag{12.7}$$

$$u_2(x,y,z)\Big|_S=\varphi(x,y,z),\ \ (x,y,z)\in S. \tag{12.8}$$

Віднімаючи почленно (12.5) і (12.7) та граничні умови (12.6) і (12.8), а також вводячи позначення $u(x,y,z)=$ $=u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z)$, отримаємо

$$\Delta u(x,y,z)=0,$$
$$u(x,y,z)\big|_S=0.$$

Згідно принципу максимуму для будь-якого $(x,y,z)\in D$ $u(x,y,z)\equiv 0$, тобто $u_1(x,y,z)\equiv u_2(x,y,z)$.
Теорема 12.2 доведена.

Теорема 12.3 (неперервна залежність від граничних умов розв'язку задачі Діріхле). Нехай функція $u(x,y,z)$ є розв'язком задачі (12.3), (12.4), а функція $\upsilon(x,y,z)$ є розв'язком рівняння Пуассона

$$\Delta\upsilon(x,y,z) = f(x,y,z)$$

і задовольняє граничні умови

$$\upsilon(x,y,z)\Big|_S = \varphi_1(x,y,z),\ (x,y,z)\in S.$$

Тоді, якщо $\left|\varphi(x,y,z)-\varphi_1(x,y,z)\right|<\varepsilon$, то $\left|u(x,y,z)-\upsilon(x,y,z)\right|<\varepsilon$ для довільної точки $(x,y,z)\in D$.

Доведення. Функція $\omega(x,y,z)=u(x,y,z)-\upsilon(x,y,z)$ є розв'язком рівняння Лапласа $\Delta\omega=0$ і на границі S задовольняє умову $\left|\omega(x,y,z)\right|=\left|\varphi(x,y,z)-\varphi_1(x,y,z)\right|<\varepsilon$, $\forall(x,y,z)\in S$. Тоді, згідно наслідку 12.2 $\left|\omega(x,y,z)\right|=\left|u(x,y,z)-\upsilon(x,y,z)\right|<\varepsilon, \forall(x,y,z)\in D$.

Теорема 12.3 доведена.

§12.3. Формули Гріна

Формули Гріна є прямим наслідком формули Остроградського-Гаусса, яка для вектор-функції $A=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+$ $+R(x,y,z)\vec{k}$ має вигляд

$$\iiint\limits_D divAdD = \iint\limits_S (A,n)dS, \tag{12.9}$$

де $(A,n)-$ скалярний добуток векторів A та n; $n\left(n^{(x)},n^{(y)},n^{(z)}\right)$ - вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі S області D.

Нехай функції $u(x,y,z),\ \upsilon(x,y,z)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$. Тоді, покладаючи в (12.9) $A=u\,grad\,\upsilon$, тобто $P=u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x}$, $Q=u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}$, $R=u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial z}$, отримаємо

$$\iiint\limits_D u\Delta\upsilon dD+\iiint\limits_D(grad\ u, grad\ \upsilon)dD=\iint\limits_S u\frac{\partial\upsilon}{\partial n}dS$$

або

$$\iiint\limits_D u\Delta\upsilon dD=-\iiint\limits_D(grad\ u, grad\ \upsilon)dD+\iint\limits_S u\frac{\partial\upsilon}{\partial n}dS. \qquad (12.10)$$

Формула (12.10) називається ***першою формулою Гріна.***

Змінюючи в (12.10) функції u та υ, дістанемо

$$\iiint\limits_D \upsilon\Delta u dD=-\iiint\limits_D(grad\upsilon, grad u)dD+\iint\limits_S \upsilon\frac{\partial u}{\partial n}dS. \qquad (12.11)$$

Віднявши від (12.10) формулу (12.11), маємо

$$\iiint\limits_D (u\Delta\upsilon-\upsilon\Delta u)dD=\iint\limits_S\left(u\frac{\partial\upsilon}{\partial n}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS. \qquad (12.12)$$

Формула (12.12) називається ***другою формулою Гріна.***

Вищевиведені формули Гріна використовують для доведення деяких властивостей гармонічних функцій.

Теорема 12.4. Якщо функція $\upsilon(x,y,z)$ є гармонічною в обмеженій області D і $\upsilon(x,y,z)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$, тоді

$$\iint\limits_S\frac{\partial\upsilon}{\partial n}dS=0.$$

Доведення. Покладемо в (12.10) $u\equiv 1$. Маємо

$$\iiint\limits_D 1\cdot\Delta\upsilon dD=-\iiint\limits_D(\mathbf{0}, grad\upsilon)dD+\iint\limits_S 1\cdot\frac{\partial\upsilon}{\partial n}dS.$$

Враховуючи, що $\Delta\upsilon=0$, маємо $\iint\limits_S\frac{\partial\upsilon}{\partial n}dS=0$.

Теорема 12.4 доведена.

Для властивості, яка доведена в теоремі 12.4 є просте фізичне тлумачення. Розглянемо стаціонарний процес поширення тепла в деякому тілі D, де функція $\upsilon(x,y,z)$ задає розподіл температури в D. Властивість означає, що сумарний потік тепла через межу S, який визначається поверхневим інтегралом $\iint\limits_S\frac{\partial\upsilon}{\partial n}dS$, дорівнює нулю.

§12.4. Єдиність розв'язку задачі Неймана

Розглянемо внутрішню задачу Неймана для рівняння Пуассона

$$\Delta u(x,y,z)= f(x,y,z), \tag{12.13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=\varphi(x,y,z),\ (x,y,z)\in S. \tag{12.14}$$

Теорема 12.5. Нехай $u(x,y,z)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$. Якщо розв'язок задачі (12.13), (12.14) існує, то він визначається з точністю до постійної.

Доведення. Нехай $u_1(x,y,z)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$, $u_2(x,y,z)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$ два розв'язки задачі (12.13), (12.14). Тобто

$$\Delta u_1(x,y,z)= f(x,y,z), \tag{12.15}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_S=\varphi(x,y,z),\ (x,y,z)\in S; \tag{12.16}$$

$$\Delta u_2(x,y,z)= f(x,y,z), \tag{12.17}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_S=\varphi(x,y,z),\ (x,y,z)\in S. \tag{12.18}$$

Віднімаючи почленно рівняння (12.15) та (12.17) і граничні умови (12.16) та (12.18), отримаємо, що функція $\upsilon(x,y,z)=$ $=u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z)$ є розв'язком наступної крайової задачі:

$$\Delta\upsilon(x,y,z)=0, \tag{12.19}$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial n}\Big|_S=0. \tag{12.20}$$

Покладаючи в (12.10) $u\equiv\upsilon$, маємо

$$\iiint\limits_D \upsilon\Delta\upsilon dD=-\iiint\limits_D\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2\right)dD+\iint\limits_S \upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial n}dS$$

або, з урахуванням (12.19), (12.20),

$$\iiint\limits_D\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2\right)dD=0.$$

Тобто, $\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2=0$ і $\upsilon_x=\upsilon_y=\upsilon_z=0$. Отже, $\upsilon(x,y,z)=const$ $\Rightarrow\ u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z)=const$.

Теорема 12.5 доведена.

В загальному випадку розв'язку внутрішньої задачі Неймана (12.13), (12.14) не існує. Виведемо необхідну умову існування даного розв'язку. Припустимо, що $u(x,y,z)\in C^2(\overline{D})$. Тоді, покладаючи в другій формулі Гріна (12.12) $\upsilon\equiv 1$, отримаємо

$$-\iiint\limits_D \Delta u dD=\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}dS.$$

Далі, враховуючи (12.13) та (12.14), маємо

$$\iiint\limits_D f(\xi,\eta,\varsigma)dD+\iint\limits_S \varphi(\xi,\eta,\varsigma)dS=0.$$

Отримана рівність і являє собою необхідну умову існування розв'язку внутрішньої задачі Неймана.

Насамкінець зауважимо, що зовнішня задача Неймана у просторі має не більше одного розв'язку. Однак, це твердження неможливо довести у випадку двох та однієї змінної.

§12.5. Єдиність розв'язку першої мішаної крайової задачі для гіперболічних рівнянь

Розглянемо першу мішану крайову задачу для рівняння гіперболічного типу

$$u_{tt}(x,y,z,t)=a^2\Delta u(x,y,z,t)+f(x,y,z,t), \qquad (12.21)$$

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z);\; u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z), \qquad (12.22)$$

$$u(x,y,z,t)\big|_S=\mu(x,y,z,t),\; (x,y,z)\in S, \qquad (12.23)$$

в області $\overline{G}=\{(x,y,z)\in\overline{D},\; t\ge 0\}$, де D - деяка скінченна область тривимірного простору, обмежена поверхнею S.

Теорема 12.6. В класі функцій $C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$ розв'язок задачі (12.21)-(12.23), якщо він існує, єдиний.

Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки $u_1(x,y,z,t)$, $u_2(x,y,z,t)$ задачі (12.21)-(12.23). Тоді функція $\upsilon=u_1-u_2$ є розв'язком наступної крайової задачі

$$\upsilon_{tt}(x,y,z,t)=a^2\Delta\upsilon(x,y,z,t), \qquad (12.24)$$

$$\upsilon(x,y,z,0)=0,\ \ \upsilon_t(x,y,z,0)=0, \tag{12.25}$$

$$\upsilon(x,y,z,t)\big|_S=0\,. \tag{12.26}$$

Згідно першої формули Гріна (12.10) при $\upsilon=u_1-u_2$, $u=\upsilon_t$ одержимо

$$\iiint\limits_D \upsilon_t\Delta\upsilon dD=-\iiint\limits_D(\nabla\upsilon_t,\nabla\upsilon)dD+\iint\limits_S\upsilon_t\frac{\partial\upsilon}{\partial n}dS. \tag{12.27}$$

Враховуючи, що згідно рівняння (12.24) $\Delta\upsilon=\dfrac{1}{a^2}\upsilon_{tt}$ і згідно граничної умови (12.26) $\upsilon_t\big|_S=0$, з рівності (12.27) маємо

$$\frac{1}{a^2}\iiint\limits_D\upsilon_t\upsilon_{tt}dD+\iiint\limits_D(\nabla\upsilon_t,\nabla\upsilon)dD=0.$$

Останню рівність запишемо у вигляді

$$\frac{1}{a^2}\iiint\limits_D\frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon_t^2\right)dD+\iiint\limits_D\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\upsilon^2\right)dD=0 \tag{12.28}$$

або

$$\frac{d}{dt}\mathrm{E}(t)=0, \tag{12.29}$$

де

$$\mathrm{E}(t)=\iiint\limits_D\left(\frac{1}{a^2}\upsilon_t^2+\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2\right)dD.$$

Розв’язуючи (12.29), отримаємо $\mathrm{E}(t)=C_1$, де $C_1=const$. Згідно початкових умов (12.25) маємо $\mathrm{E}(t)\big|_{t=0}=0\Rightarrow C_1=0$. Отже, $E(t)\equiv0.$ А це можливо лише у випадку, коли $\upsilon_t=\upsilon_x=\upsilon_y=\upsilon_z\equiv0.$ Тому $\upsilon(x,y,z,t)=C_2$, де $C_2=const$. Згідно першої з початкових умов (12.25) $\upsilon(x,y,z,0)=0,$ тобто $C_2=0$. Таким чином, $\upsilon(x,y,z,t)\equiv0$ і $u_1(x,y,z)\equiv u_2(x,y,z).$

Теорема 12.6 доведена.

ТЕМА 13. Метод розділення змінних (метод Фур'є) для еліптичних рівнянь

§13.1. Задача Діріхле для рівняння Лапласа в прямокутнику

Знайдемо розв'язок рівняння Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{13.1}$$

в прямокутнику *OACB* (рис.13.1) при умові, що на сторонах прямокутника задані граничні умови першого роду

$$u\big|_{y=0} = f(x),\ u\big|_{y=b} = \varphi(x), \tag{13.2}$$

$$u\big|_{x=0} = \psi(y),\ u\big|_{x=a} = \eta(y), \tag{13.3}$$

де $f(x), \varphi(x), \psi(y), \eta(y)$ - задані функції.

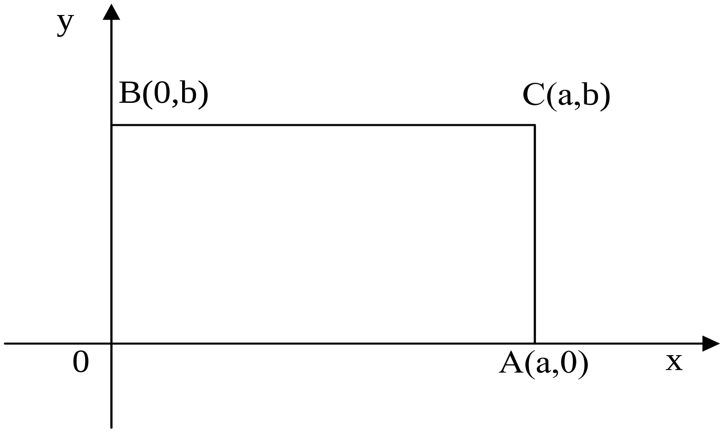

Рис. 13.1. Область розв'язку задачі

Будемо вимагати виконання умов узгодження граничних умов

$$f(0) = \psi(0),\ f(a) = \eta(0),\ \eta(b) = \varphi(a),\ \varphi(0) = \psi(b). \tag{13.4}$$

Шукану функцію подамо у наступному вигляді

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \upsilon(x, y), \tag{13.5}$$

де $u_0(x,y)$ - гармонічна функція, яка вибирається так, щоб нова невідома функція $\upsilon(x,y)$ в усіх вершинах прямокутника перетворювалась в нуль. Покладаючи

$$u_0(x,y)=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta xy, \tag{13.6}$$

бачимо, що дана функція є гармонічною. Невідомі коефіцієнти $\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \gamma$ виберемо з умов (13.2), (13.3) та умов $\upsilon(0;0)=0,\ \upsilon(a,0)=0,\ \upsilon(0,b)=0,\ \upsilon(a,b)=0$. Тоді маємо $\alpha=f(0), \alpha+\beta\cdot a=f(a), \alpha+\gamma\cdot b=\varphi(0), \alpha+\beta\cdot a+\gamma\cdot b+\delta\cdot ab=\varphi(a)$. Звідки

$$\alpha=f(0),\ \beta=\frac{f(a)-f(0)}{a},\ \gamma=\frac{\varphi(0)-f(0)}{b},\ \delta=\frac{(\varphi(a)-f(a))+(f(0)-\varphi(0))}{ab}. \tag{13.7}$$

Підставляючи (13.5) в умови (13.2), (13.3) та врахувавши (13.6), (13.7), отримаємо, що гармонічна функція $\upsilon(x,y)$ задовольняє граничні умови

$$\upsilon\big|_{y=0}=\overline{f}(x),\ \upsilon\big|_{y=b}=\overline{\varphi}(x), \tag{13.8}$$

$$\upsilon\big|_{x=0}=\overline{\psi}(y),\ \upsilon\big|_{x=a}=\overline{\eta}(y), \tag{13.9}$$

де функції $\overline{\varphi}(x)$, $\overline{f}(x)$, $\overline{\psi}(y)$, $\overline{\eta}(y)$ перетворюються в нуль у вершинах прямокутника і

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-u_0(x,b),$$
$$\overline{f}(x)=f(x)-u_0(x,0),$$
$$\overline{\psi}(y)=\psi(y)-u_0(0,y),$$
$$\overline{\eta}(y)=\eta(y)-u_0(a,y).$$

Функцію $\upsilon(x,y)$ можна подати у вигляді суми чотирьох гармонічних функцій (проводимо редукцію загальної задачі)

$$\upsilon(x,y)=\upsilon_1(x,y)+\upsilon_2(x,y)+\upsilon_3(x,y)+\upsilon_4(x,y),$$

кожна з яких приймає задане значення на одній із сторін і перетворюється в нуль на інших трьох сторонах прямокутника.

Знайдемо одну з таких функцій, наприклад $\upsilon_1(x, y)$ з рівняння

$$(\upsilon_1)_{xx} + (\upsilon_1)_{yy} = 0 \qquad (13.10)$$

і яка задовольняє граничні умови

$$\upsilon_1\Big|_{y=0} = 0,\ \upsilon_1\Big|_{y=b} = \overline{\varphi}(x),\ \upsilon_1\Big|_{x=0} = 0,\ \upsilon_1\Big|_{x=a} = 0. \qquad (13.11)$$

Покладаючи $\upsilon_1(x, y) = X(x)\cdot Y(y) \neq 0$, з (13.10) отримуємо

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda = const$$

або

$$Y'' - \lambda Y = 0, \qquad (13.12)$$

$$X'' + \lambda X = 0. \qquad (13.13)$$

З граничних умов (13.11) маємо

$$X(0) = 0,\quad X(a) = 0, \qquad (13.14)$$

$$Y(0) = 0. \qquad (13.15)$$

Задача Штурма-Ліувілля (13.13), (13.14) нами розв'язана (див. тема 4) і

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2,\quad X_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n}{a}x.$$

Характеристичне рівняння для (13.12) має вигляд

$$k^2 - \lambda = 0,\quad \lambda > 0.$$

Звідки отримуємо

$$k_1 = \sqrt{\lambda},\quad k_2 = -\sqrt{\lambda}$$

або

$$k_1 = \frac{\pi n}{a}, k_2 = -\frac{\pi n}{a}.$$

Тоді загальним розв'язком лінійного диференціального рівняння (13.12) є

$$Y_n(y) = A_n^* e^{-\frac{\pi n}{a}y} + B_n^* e^{\frac{\pi n}{a}y},$$

де A_n^*, B_n^* – деякі константи. Умова (13.15) дає

$$A_n^* + B_n^* = 0,$$
$$A_n^* = -B_n^*.$$

Тоді

$$Y_n(y) = B_n^* \cdot \left(e^{\frac{\pi n}{a} y} - e^{-\frac{\pi n}{a} y} \right),$$

або

$$Y_n(y) = B_n sh \frac{\pi n}{a} y,$$

де $B_n = 2B_n^*$. Отже, розв'язок задачі (13.10), (13.11) можна подати у вигляді ряду

$$\upsilon_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sh \frac{\pi n}{a} y \sin \frac{\pi n}{a} x,$$

де $A_n = C_n \cdot B_n$. З граничної умови $\upsilon_1\big|_{y=b} = \overline{\varphi}(x)$ маємо $A_n = \dfrac{\overline{\varphi_n}}{sh \frac{\pi n}{a} b}$, де $\overline{\varphi_n} = \dfrac{2}{a} \int_0^a \overline{\varphi}(x) \sin \dfrac{\pi n}{a} x dx$. Отже,

$$\upsilon_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_n} \frac{sh \frac{\pi n}{a} y}{sh \frac{\pi n}{a} b} \sin \frac{\pi n}{a} x.$$

Аналогічно знаходячи $\upsilon_2(x, y)$, $\upsilon_3(x, y)$, $\upsilon_4(x, y)$, одержимо

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\overline{\varphi_n} \frac{sh \frac{\pi n}{a} y}{sh \frac{\pi n}{a} b} + \overline{f_n} \frac{sh \frac{\pi n}{a} (b - y)}{sh \frac{\pi n}{a} b} \right] \sin \frac{\pi n}{a} x + \right.$$
$$\left. + \left[\overline{\eta_n} \frac{sh \frac{\pi n}{b} x}{sh \frac{\pi n}{b} a} + \overline{\psi_n} \frac{sh \frac{\pi n}{b} (a - x)}{sh \frac{\pi n}{b} a} \right] \sin \frac{\pi n}{b} y \right\} + u_0(x, y),$$

де

$$\overline{f}_n = \frac{2}{a}\int_0^a \overline{f}(x)\sin\frac{\pi n}{a}x dx,\ \ \overline{\psi_n} = \frac{2}{b}\int_0^b \overline{\psi}(y)\sin\frac{\pi n}{b}y dy,$$

$$\overline{\eta_n} = \frac{2}{b}\int_0^b \overline{\eta}(y)\sin\frac{\pi n}{b}y dy.$$

§13.2. Задача Діріхле для рівняння Лапласа в крузі

Знайдемо розв'язок рівняння Лапласа (записаного в полярних координатах)

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \qquad (13.16)$$

в області $D = \{(r,\theta)\ |0 \le r < R,\ 0 < \theta \le 2\pi\}$, який задовольняє граничну умову

$$u(r,\theta)\big|_{r=R} = f(\theta),\ 0 < \theta \le 2\pi. \qquad (13.17)$$

Крім того мають виконуватись умови періодичності (випливають з умови єдиності розв'язку)

$$u(R,\theta) = u(R,\theta + 2\pi),$$

$$f(\theta) = f(\theta + 2\pi).$$

Нетривіальні розв'язки рівняння (13.16) шукаємо у вигляді

$$u(r,\theta) = X(r)\cdot Y(\theta) \ne 0. \qquad (13.18)$$

Підставивши (13.18) у (13.16) та відокремивши змінні, одержимо

$$Y''(\theta) + \lambda Y(\theta) = 0, \qquad (13.19)$$

$$r^2 X''(r) + rX'(r) - \lambda X(r) = 0, \qquad (13.20)$$

при умові

$$Y(\theta) = Y(\theta + 2\pi), \qquad (13.21)$$

де λ - деяка константа.

Задача на власні значення (13.19), (13.21) розв'язана при дослідженні коливань круглої мембрани (див. §6.2) і

$$\lambda_n = n^2,\ Y_n(\theta) = C_1\cos n\theta + C_2\sin n\theta,\ \ n = 1,2,3,\ldots \qquad (13.22)$$

де C_1, C_2 - поки що довільні константи.

Підставивши знайдені значення λ_n в (13.20), маємо

$$r^2 X''(r) + rX'(r) - n^2 X(r) = 0. \qquad (13.23)$$

Звичайне диференціальне рівняння (13.23) є рівнянням Ейлера і заміною $r = e^t$ зводиться до вигляду

$$X''(t) - n^2 X(t) = 0.$$

Розв'язуючи вищенаведене лінійне диференціальне рівняння, дістанемо

$$X_n(t) = \begin{cases} C_3 e^{-nt} + C_4 e^{nt}, & n > 0; \\ C_5 t + C_6, & n = 0; \end{cases}$$

або

$$X_n(r) = \begin{cases} C_3 r^{-n} + C_4 r^n, & n > 0; \\ C_5 \ln r + C_{6,} & n = 0. \end{cases}$$

Для того, щоб функція $X_n(r)$ в крузі $0 \le r < R$ була неперервною, потрібно покласти $C_3 = C_5 = 0$. Отже,

$$X_n(r) = C_4 r^n, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{13.24}$$

Тому розв'язок шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} X_n(r) \cdot Y_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right) = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right), \end{aligned} \tag{13.25}$$

де $A_n = C_1 C_4$, $B_n = C_2 C_4$. Константи A_n та B_n треба вибрати так, щоб ряд (13.25) задовольняв граничну умову (13.17). З (13.17) отримаємо

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left(A_n \cos\ n\theta + B_n \sin\ n\theta\right).$$

Тоді, розкладаючи функцію $f(\theta)$ в ряд Фур'є на відрізку $[0;2\pi]$ (з коефіцієнтами α_n та β_n), отримаємо

$$A_n = \frac{\alpha_n}{R^n} = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos n\xi d\xi, \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$B_n = \frac{\beta_n}{R^n} = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Підставивши знайдені коефіцієнти A_n, B_n в ряд (13.25), змінивши порядок сумування та інтегрування, одержимо

$$u(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(\cos n\xi\cos n\theta+\sin n\xi\sin n\theta)\right\}d\xi =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos(n(\xi-\theta))\right\}d\xi. \qquad (13.26)$$

Враховуючи, що в крузі D $t=\dfrac{r}{R}<1$, а $\cos n(\xi-\theta)=\mathrm{Re}\ e^{in(\xi-\theta)}$, отримаємо

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty} t^n\cos[n(\xi-\theta)]=-1+2\sum_{n=0}^{\infty} t^n\,\mathrm{Re}\ e^{in(\xi-\theta)}=$$

$$=-1+2\sum_{n=0}^{\infty}(t\,\mathrm{Re}\,e^{i(\xi-\theta)})^n=-1+2\,\mathrm{Re}\frac{1}{1-te^{i(\xi-\theta)}}=$$

$$=-1+2\,\mathrm{Re}\frac{1-t\cos(\xi-\theta)+it\sin(\xi-\theta)}{(1-t\cos(\xi-\theta))^2+t^2\sin^2(\xi-\theta)}=$$

$$=\frac{1-t^2}{1+t^2-2r\cos(\xi-\theta)}=\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\xi-\theta)}.$$

Отже,

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\xi-\theta)}d\xi\,. \qquad (13.27)$$

Інтеграл (13.27) називається ***інтегралом Пуассона***, а підінтегральний вираз $K(r,\theta,R,\xi)=\dfrac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\xi-\theta)}$ називається ***ядром Пуассона***.

Інтеграл Пуассона (13.27) існує за умови, що $r<R$. Якщо $r=R$, то представлення (13.27) втрачає зміст. Однак можна показати, що при $r=R$ інтеграл Пуассона задовольняє умову

$$\lim_{\theta\to\theta_0} u(r,\theta)=f(\theta_0)\,.$$

<u>Практична робота №7</u>
Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу

<u>Приклад П7.1</u>. Знайти розв’язок рівняння Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{П7.1}$$

в прямокутнику $0 < x < p$, $0 < y < s$, який задовольняє наступним граничним умовам:

$$u(0, y) = u_x(p, y) = 0, \tag{П7.2}$$

$$u(x,0) = 0,\ u(x, s) = f(x). \tag{П7.3}$$

<u>Розв’язання</u>. Розв’язок шукаємо у вигляді

$$u(x, y) = X(x)\cdot Y(y) \not\equiv 0. \tag{П7.4}$$

Тоді, з рівняння (П7.1), маємо

$$X''\cdot Y + X\cdot Y'' = 0,$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y},$$

або

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda, \tag{П7.5}$$

де $\lambda = const$. З (П7.5) дістанемо

$$Y'' - \lambda Y = 0, \tag{П7.6}$$

$$X'' + \lambda X = 0. \tag{П7.7}$$

З граничних умов отримуємо

$$u(0, y) = X(0)\cdot Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0, \tag{П7.8}$$

$$u_x(p, y) = X'(p)\cdot Y(y) = 0 \Rightarrow X'(p) = 0, \tag{П7.9}$$

$$u(x,0) = X(x)\cdot Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0. \tag{П7.10}$$

Задача Штурма-Ліувілля (П7.7)-(П7.9) вже розв’язана (див. приклад П4.2), і

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2p}\right)^2,\ X_n(x) = C_1 \sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}x, n = 0,1,2,\ldots, \tag{П7.11}$$

де C_1 – довільна стала. Розв’язуючи задачу (П7.6), (П7.10) при знайдених λ_n, знаходимо

$$Y_n(y) = C_2 sh\frac{\pi(2n+1)}{2p}y, n = 0,1,2,\ldots \tag{П7.12}$$

Отже, розв'язок задачі (П7.1)-(П7.3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n sh\frac{(2n+1)\pi}{2p}y\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}x, \qquad (П7.13)$$

де $A_n = C_1 \cdot C_2$. З другої граничної умови (П7.3), при $y = s$, отримуємо

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n sh\frac{(2n+1)\pi}{2p}s\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}x = f(x).$$

Розкладемо функцію $f(x)$ на відрізку $[0;p]$ в ряд Фур'є лише за синусами. Дістанемо

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n sh\frac{(2n+1)\pi}{2p}s\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}x=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}x,$$

де

$$f_n=\frac{2}{p}\int_o^p f(\xi)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}\xi d\xi.$$

Вищенаведена рівність буде виконуватись, якщо

$$A_n\cdot sh\frac{(2n+1)\pi}{2p}s=f_n \Rightarrow A_n=\frac{f_n}{sh\frac{(2n+1)\pi}{2p}s}.$$

Відповідь:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sh\frac{(2n+1)\pi}{2p}y}{sh\frac{(2n+1)\pi}{2p}s}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}x,$$

де

$$f_n=\frac{2}{p}\int_o^p f(\xi)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}\xi d\xi.$$

Приклад П7.2. Знайти функцію, гармонічну всередині одиничного круга з центром в початку координат і таку, що

$$u\big|_{r=1}=\cos^2\varphi. \qquad (П7.14)$$

Розв'язання. Як відомо, функція $u(r,\varphi)$, гармонічна в середині круга $D=\{(r,\varphi)\,|\,0\le r<R, 0<\varphi\le 2\pi\}$, є розв'язком рівняння Лапласа (записаного в полярних координатах)

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0\,. \qquad (\text{П}7.15)$$

Якщо $u(r,\varphi)$ задовольняє граничну умову першого роду

$$u(r,\varphi)\big|_{r=R}=f(\varphi),\; 0<\varphi\le 2\pi\,, \qquad (\text{П}7.16)$$

то розв'язком граничної задачі (П7.15), (П7.16) є ряд

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)\,, \qquad (\text{П}7.17)$$

де

$$A_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(\psi)\cos n\psi\,d\psi\,,\; n=0,1,2,\ldots.$$

$$B_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(\psi)\sin n\psi\,d\psi\,,\; n=0,1,2,\ldots.$$

Отже, розв'язком рівняння (П7.15) є функція (П7.17), причому коефіцієнти A_n, B_n знайдемо з умови (П7.14), враховуючи, що $R=1$. Маємо

$$u\big|_{r=1}=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)=\cos^2\varphi\,,$$

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)=\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{2}\,. \qquad (\text{П}7.18)$$

З (П7.18) отримаємо

$$A_0=1,\; A_1=0\;,\; A_2=\frac{1}{2},\; A_i=0\,,\; i=3,4,\ldots, B_j=0\,,\; j=1,2,\ldots.$$

Отже, розв'язком граничної задачі (П7.15), (П7.14) є функція

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2}+\frac{r^2}{2}\cos 2\varphi\,.$$

Відповідь:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2}(1+r^2\cos 2\varphi)\,.$$

Завдання для самостійної роботи

I рівень

1. Знайти функцію, гармонічну всередині одиничного круга з центром в початку координат і таку, що $u\big|_{r=1} = \cos^4 \varphi$.

2. Знайти функцію, гармонічну всередині одиничного круга з центром в початку координат і таку, що $u\big|_{r=1} = \sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi$.

3. Знайти розв'язок $u = u(x, y)$ рівняння Лапласа в прямокутнику $0 < x < p$, $0 < y < s$, який задовольняє граничним умовам

$$u(0, y) = 0,\ u(p, y) = y,\ u(x,0) = 0,\ u(x, s) = \frac{s}{p} x.$$

4. Знайти розв'язок $u = u(x, y)$ рівняння Лапласа в прямокутнику $0 < x < p$, $0 < y < s$, який задовольняє граничним умовам

$$u_x(0, y) = 0,\ u(p, y) = 0,\ u(x,0) = 0,\ u(x, s) = \frac{s}{p} x.$$

II рівень

Знайти розв'язок $u = u(x, y)$ рівняння Лапласа в прямокутнику $0 < x < p$, $0 < y < s$, який задовольняє граничним умовам

1. $u_x(0, y) = u(p, y) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u_y(x, s) = Bx$.
2. $u_x(0, y) = u_x(p, y) = 0$, $u(x,0) = A$, $u(x, s) = Bx$.
3. $u(0, y) = 0$, $u_x(p, y) = q$, $u(x,0) = 0$, $u(x, s) = A$.
4. $u(0, y) = A$, $u(p, y) = Ax$, $u_y(x,0) = u_y(x, b) = 0$.
5. $u_x(0, y) = u_x(p, y) = 0$, $u(x,0) = 1$, $u(x, s) = 2$.

В крузі $0 \le r < R$ знайти гармонічні функції, які задовольняють граничним умовам

6. $u(R, \varphi) = \varphi \cdot (2\pi - \varphi)$.
7. $u(R, \varphi) = \varphi \cdot \sin \varphi$.

<u>ТЕМА 14.</u> Метод функції Гріна

§14.1. Основна інтегральна формула Гріна та основна формула теорії гармонічних функцій

Розглянемо в тривимірному просторі деяку область D, обмежену достатньо гладкою поверхнею S.

Теорема 14.1. Якщо функція $u(x,y,z)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$, тоді для неї справедлива основна інтегральна формула Гріна

$$B\cdot u(M_0)=\iint\limits_S\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u(P)}{\partial n}-u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS-\iiint\limits_D\frac{\Delta u(P)}{r}d\xi d\eta d\zeta, \quad (14.1)$$

де $M_0=M_0(x,y,z)$, $P=P(\xi,\eta,\zeta)$, $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$,

$$B=\begin{cases}4\pi, M_0\in D;\\ 2\pi, M_0\in S;\\ 0, M_0\notin\overline{D}.\end{cases}$$

Доведення. Як відомо (див. тема 11), функція $\dfrac{1}{r}$ є гармонічною в області D при $P\neq M_0$. Розглянемо наступні випадки.

1. Нехай $M_0\notin\overline{D}$. Тоді, використовуючи другу формулу Гріна для функцій u та $\upsilon=\dfrac{1}{r}$, отримуємо

$$\iiint\limits_D\left[u\Delta\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\Delta u\right]d\xi d\eta d\zeta=\iint\limits_S\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS.$$

Отже

$$0=\iint\limits_S\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS-\iiint\limits_D\frac{\Delta u}{r}d\xi d\eta d\zeta.$$

Тобто, $B=0$.

2. Нехай $M_0\in D$. Оскільки функція $\upsilon=\dfrac{1}{r}$ при $P=M_0$ перетворюється у нескінченність, то безпосередньо застосувати другу формулу Гріна не можна.

Виріжемо з області D кулю D_ε малого радіуса ε, яка обмежена сферою S_ε (див. рис.14.1) з центром в точці M_0.

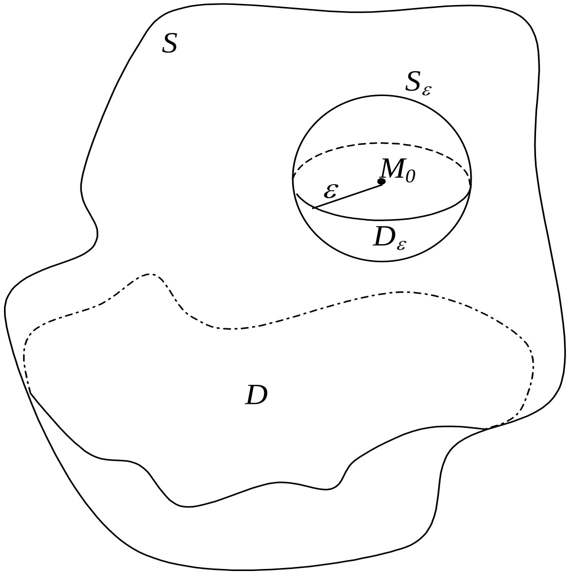

Рис. 14.1. Область D тривимірного простору

Нехай $D_\varepsilon \cup S_\varepsilon = \overline{D}_\varepsilon \in D$. Застосовуючи другу формулу Гріна в області $D \setminus \overline{D}_\varepsilon$, отримуємо

$$\iiint\limits_{D\setminus\overline{D}_\varepsilon}\left[u\Delta\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\Delta u\right]d\xi d\eta d\zeta =$$
$$=\iint\limits_{S}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS+\iint\limits_{S_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS-\iint\limits_{S_\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS. \tag{14.2}$$

Якщо $P \in S_\varepsilon$, то $r=\varepsilon$. На поверхні S_ε зовнішня нормаль $\vec{n}$ і радіус кулі мають протилежні напрямки. Тому

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg\|_{S_\varepsilon}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg\|_{S_\varepsilon}=\frac{1}{r^2}\Big|_{S_\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Тоді, використовуючи теорему про середнє значення для визначених інтегралів, одержимо

$$\iint_{S_\varepsilon} u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon} u dS = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2\cdot u^* = 4\pi u^*,$$

$$\iint_{S_\varepsilon} \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}dS = \frac{1}{\varepsilon}\iint_{S_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \frac{1}{\varepsilon}\cdot 4\pi\varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*,$$

де $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*$, u^* - середні значення функцій $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)$, u на сфері S_ε. Спрямуємо радіус сфери S_ε до нуля. Дістанемо

а) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 0,$ оскільки $u\in C^2(D)$ і її перші похідні є неперервними, а отже – обмеженими у внутрішніх точках області D.

б) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 4\pi u^* = 4\pi u(M_0)$, оскільки функція $u(x,y,z)$ є неперервною.

в) згідно означення невласного інтеграла

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{D\backslash D_\varepsilon}\frac{\Delta u(P)}{r}d\xi d\eta d\zeta = \iiint_D \frac{\Delta u(P)}{r}d\xi d\eta d\zeta.$$

Враховуючи вищесказане, з (14.2) маємо

$$4\pi u(M_0) = \iint_S \left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]dS - \iiint_D \frac{\Delta u(P)}{r}d\xi d\eta.$$

Тобто, $B = 4\pi$.

3. Нехай $M_0\in S$. Припустимо, що в цій точці поверхня S має дотичну площину з неперервним кутовим коефіцієнтом. Проведемо сферу малого радіуса ε з центром в точці M_0 (див. рис.14.2). Нехай S' - це частина S, яка знаходиться в кулі D_ε. Нехай $D'_\varepsilon = D_\varepsilon \cap D$,

S'_ε - це частина S_ε, яка знаходиться в області D. Тоді, згідно з другою формулою Гріна, отримаємо

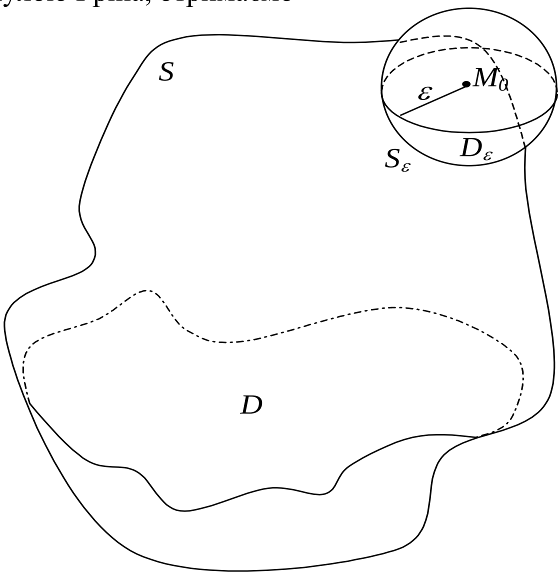

Рис. 14.2. Точка M_0 знаходиться на поверхні S

$$\iiint\limits_{D\setminus D'_\varepsilon} \frac{\Delta u(p)}{r} d\xi d\eta d\zeta = \iint\limits_{S\setminus S'_\varepsilon} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \right] dS + \\ + \iint\limits_{S'_\varepsilon} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u(P)}{\partial n} \right] dS - \iint\limits_{S'_\varepsilon} u(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS. \tag{14.3}$$

Повторюючи аналогічні міркування, як і в пункті 2 і враховуючи, що $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{S'_\varepsilon} u(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds = 2\pi u(M_0)$, з (14.3) при $\varepsilon \to 0$ отримуємо (14.1), де $B = 2\pi$.

Теорема 14.1 доведена.

Припустимо що функція $u(x, y, z)$ є гармонічною в області D. Тоді з (14.1) отримаємо ***основну формулу теорії гармонічних функцій***

$$B \cdot u(M_0) = \iint\limits_S \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \right] dS. \tag{14.4}$$

Зауважимо, що якщо точка M_0 є конічною вершиною поверхні S, то в (14.1) $B=\alpha$ (радіан), де α - величина кута, утвореного дотичними до S в точці M_0.

В двовимірному випадку для області S обмеженої контуром L формула (14.1) набуває вигляду

$$B\cdot u(M_0)=\int\limits_L\left[\ln\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u(P)}{\partial n}-u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]dL-\iint\limits_S \Delta u(P)\cdot\ln\frac{1}{r}\,d\xi d\eta,$$

де $B=\begin{cases}2\pi, M_0\in S;\\ \pi, M_0\in L;\\ 0, M_0\notin S.\end{cases}$

§14.2. Функція Гріна для оператора Лапласа

Нехай $g(x,y,z),\ u(x,y,z)$ – гармонічні функції. Тоді, використавши другу формулу Гріна, дістанемо

$$0=\iint\limits_S\left(g\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial g}{\partial n}\right)dS. \tag{14.5}$$

Додаючи (14.5) та (14.4) при $B=4\pi$, одержимо

$$u(M_0)=\iint\limits_S\left(G(P,M_0)\frac{\partial u}{\partial n}-u\cdot\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n}\right), \tag{14.6}$$

де $M_0=M_0(x,y,z)\in D,\ P=P(\xi,\eta,\zeta)\in S$, а функція $G(P,M_0)$ визначається як

$$G(P,M_0)=\frac{1}{4\pi r}+g(P,M_0). \tag{14.7}$$

Формула (14.6) дає представлення функції $u(x,y,z)$ через її значення на межі S і містить $u|_S$ та $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S$. Але в задачі Діріхле відомо лише $u|_S$, а в задачі Неймана лише $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S$. Тому функція

$G(P, M_0)$ вибирається таким чином, що $G(P, M_0)\big|_S = 0$ для задачі Діріхле і $\frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n}\Big|_S = 0$ для задачі Неймана.

Функція $G(P, M_0)$ називається ***функцією Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа***, якщо вона задовольняє наступні умови:

1. $G(P, M_0)$ є гармонічною функцією в області D точки P при $P \neq M_0$ і перетворюється в нескінченність при $P = M_0$;
2. Функція $G(P, M_0)$ допускає представлення (14.7), де функція $g(P, M_0)$ як функція точки P є гармонічною в області D;
3. Функція $G(P, M_0)$ задовольняє граничну умову

$$G(P, M_0)\big|_S = 0. \tag{14.8}$$

Побудова функції Гріна $G(P, M_0)$ зводиться до знаходження її регулярної частини $g(P, M_0)$, яка визначається із наступної задачі Діріхле:

$$\Delta g = 0, \quad g(P, M_0)\Big|_S = -\frac{1}{4\pi r}, \; M_0 \in D, \; P \in S. \tag{14.9}$$

Отже, згідно (14.6) розв'язок задачі Діріхле

$$\Delta u(M_0) = 0, \quad u(P)\big|_S = f(P), \, M_0 \in D, \, P \in S \tag{14.10}$$

подається у вигляді

$$u(M_0) = -\iint\limits_S f(P) \frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n} dS. \tag{14.11}$$

Якщо нам дано задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta u(M_0) = \varphi(M_0), \quad u(P)\big|_S = f(P), M_0 \in D, P \in S, \tag{14.12}$$

то поклавши в (14.1) замість функції $\frac{1}{4\pi r}$ функцію Гріна $G(P, M_0)$, врахувавши (14.8) та (14.12), дістанемо

$$u(M_0) = -\iint_S f(P)\frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n}dS - \iiint_D \varphi(P)G(P, M_0)d\xi d\eta d\varsigma.$$

§14.3. Приклади функцій Гріна для деяких областей

Без детального виведення наведемо вигляд функцій Гріна для деяких канонічних областей (детально див., наприклад, [49]).

1. Для кулі з центром в початку координат і радіусом R функція $G(P, M_0)$ має наступний вигляд:

$$G(P, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{r_0}\cdot\frac{1}{r_1}\right),$$

де

$P = P(\xi, \eta, \zeta)$, $M_0 = M_0(x, y, z)$, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, $r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r_1 = \left|\overrightarrow{PM_1}\right|$, точка M_1 лежить на прямій OM_0 так, що $r_0 \cdot \left|\overrightarrow{OM_1}\right| = R^2$ (див. рис. 14.3).

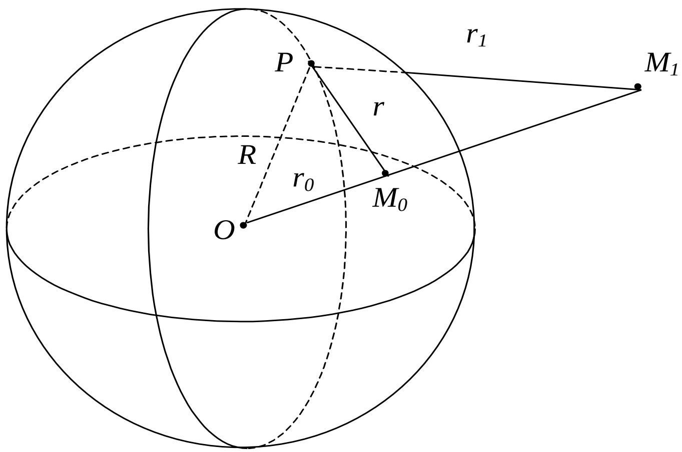

Рис. 14.3. Куля з центром в початку координат

В даному випадку

$$\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n}\Big|_S = -\frac{1}{4\pi R}\cdot\frac{R^2 - r_0^2}{r^3}.$$

2. Для круга (див. рис. 14.4) функція Гріна має вигляд

$$G(P,M_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r} - \ln\left(\frac{R}{r_0}\cdot\frac{1}{r_1}\right)\right),$$

де точка M_1 така, що $\left|\overrightarrow{OM_1}\right|\cdot r_0 = R^2$. Причому

$$\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n}\Big|_L = -\frac{1}{2\pi R}\cdot\frac{R^2 - r_0^{\ 2}}{r^2}.$$

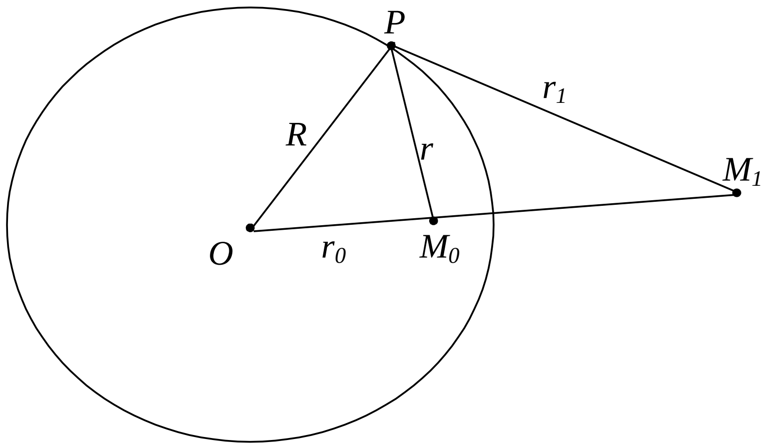

Рис. 14.4. Круг з центром в початку координат

З наведених прикладів видно, що функцію Гріна легко побудувати лише для канонічних областей.

<u>ТЕМА 15.</u> Елементи теорії потенціалу

§15.1. Потенціал об'єму, подвійного та простого шарів

Нехай в тривимірному просторі в деякій точці $A(a,b,c)$ розміщено точковий електричний заряд. Згідно закону Кулона даний точковий заряд створює електростатичне поле, напруженість $\vec{E}$ якого визначається рівністю

$$\vec{E} = kq\frac{\vec{r}}{r^3},$$

або в проекціях на осі координат

$$E_1 = kq\frac{x-a}{r^3},\ E_2 = kq\frac{y-b}{r^3},\ E_3 = kq\frac{y-c}{r^3}, \qquad (15.1)$$

де k - коефіцієнт пропорційності, який залежить від вибраної системи одиниць; $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$, де $M = M(x,y,z)$.

Надалі вважатимемо, що $k = 1$. Як видно з (15.1)

$$\vec{E} = -grad\, u,$$

де $u = \frac{q}{r} + C_1$, $C_1 = const$. Функція $u(x,y,z)$ називається ***потенціалом електростатичного поля***. Щоб забезпечити виконання умови регулярності на нескінченності, тобто $u(M) \to 0$ при $M \to \infty$, покладають $C_1 = 0$. Отже, точковий заряд q створює потенціал

$$u(x,y,z) = \frac{q}{r} = \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}. \qquad (15.2)$$

Оскільки при наявності декількох точкових зарядів їх потенціали додаються, то потенціал створений неперервно розподіленим зарядом визначається у вигляді інтеграла. Нехай заряд розподілений по об'єму T з об'ємною густиною $f(x,y,z)$. Тоді величина потенціалу, який створений даним зарядом, буде дорівнювати

$$u(x,y,z) = \iiint\limits_T \frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{r}\, d\xi d\eta d\zeta, \qquad (15.3)$$

де

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}\ .$$

Права частина (15.3) називається ***об'ємним потенціалом***.

Нехай заряд розподілений по поверхні S з поверхневою густиною $\varphi(x,y,z)$. Тоді

$$u(x,y,z) = \iint\limits_S \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{r} dS\ . \qquad (15.4)$$

Права частина (15.4) називається ***потенціалом простого шару***.

Нехай задана деяка орієнтована поверхня S на якій визначаються внутрішня та зовнішня сторони. Нехай на поверхні S розподілений диполь $\mu(x,y,z)$. Тоді величина потенціалу, який створений диполем буде визначатися рівністю

$$u(x,y,z) = -\iint\limits_S \mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS = \iint\limits_S \mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\cos\varphi}{r^2}dS\ , \qquad (15.5)$$

де $\varphi = (\vec{r},\vec{n})$ - кут між зовнішньою нормаллю $\vec{n}$ та вектором $\vec{r} = \overrightarrow{MN}$; $M(x,y,z)$ - деяка фіксована точка простору, $N(\xi,\eta,\zeta)$ - змінна точка на поверхні S. Інтеграл в (15.5) називається ***потенціалом подвійного шару***.

§15.2. Властивості потенціалів

Нехай T – обмежена область тривимірного простору з поверхнею S. Вважатимемо, що функція $f(\xi,\eta,\zeta)$ в (15.3) є обмеженою та інтегрованою в T.

Теорема 15.1. Функція $u(x,y,z)$, визначена інтегралом в (15.3) є гармонічною зовні T.

Теорема 15.2. Якщо функція $f(\xi,\eta,\zeta)$ належить класу $C\left(\overline{T}\right)\cap C^1(T)$, то об'ємний потенціал (15.3) має неперервні похідні другого порядку в області T і задовольняє в цій області рівняння Пуассона

$$\Delta u(x,y,z) = -4\pi f(x,y,z). \qquad (15.6)$$

Наслідок 15.1. Якщо функція $f(x,y,z)$ належить класу $C(\overline{T}) \cap C^1(T)$, то рівняння $\Delta u(x,y,z) = -f(x,y,z)$ має частинний розв'язок $u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_T \frac{f(\xi,\eta,\varphi)}{r} d\xi d\eta d\zeta$.

Теорема 15.3. Потенціал подвійного шару $u(x,y,z)$ має границі при прямуванні точки $M(x,y,z)$ до деякої точки $N_0 \in S$ зовні або зсередини поверхні S. Якщо границю зовні позначити через $u_l(N_0)$, а зсередини через $u_i(N_0)$, то мають місце наступні залежності:

$$u_l(N_0) = \iint\limits_s \mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} dS - 2\pi\mu(N_0) = u(N_0) - 2\pi\mu(N_0); \quad (15.7)$$

$$u_i(N_0) = \iint\limits_S \mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} dS + 2\pi\mu(N_0) = u(N_0) + 2\pi\mu(N_0); \quad (15.8)$$

де φ_0 - кут між напрямком $\vec{r}_0 = \overrightarrow{N_0 N}$ та зовнішньою нормаллю $\vec{n}$ до поверхні S в змінній точці $N(\xi, \eta, \zeta)$.У всіх точках $M(x,y,z)$, які не належать S, потенціал простого шару (15.4) має похідні всіх порядків і прямує до нуля на нескінченності. Безпосередньою перевіркою можна впевнитись, що потенціал простого шару задовольняє рівняння Лапласа в точках $M(x,y,z) \in S$.

Теорема 15.4. Потенціал простого шару (15.4) з неперервною густиною φ є функцією неперервною у всьому просторі.

Нехай $\vec{n}_0$ - напрямок зовнішньої нормалі до S в точці N_0. Вважаючи, що $M(x,y,z) \in S$, знайдемо похідну від функції (15.4) за напрямком $\vec{n}_0$. Від точки $M(x,y,z)$ залежить лише один множник $\frac{1}{r}$ і ми можемо диференціювати під знаком інтеграла. Тоді

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_0} = \iint_S \varphi(N) \frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \iint_s \varphi(N) \frac{\cos\varphi_0}{r^2} dS. \quad (15.9)$$

Наголосимо на різниці між інтегралом (15.9) та потенціалом подвійного шару (15.5). В інтегралі (15.5) береться кут між напрямком $\vec{r} = \overrightarrow{MN}$ та нормаллю $\vec{n}$ до поверхні S в змінній точці $N(\xi, \eta, \zeta) \in S$, а в інтегралі (15.9) розглядається кут φ_0 між напрямком $\vec{r}$ і зовнішньою нормаллю $\vec{n}_0$ до поверхні S в фіксованій точці $N_0 \in S$. Позначимо через $\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i$ границю $\frac{\partial u(M)}{\partial n_0}$ коли $M \to N_0$ зсередини поверхні S, а через $\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_l$ границю, коли $M \to N_0$ зовні поверхні S. Тоді мають місце співвідношення

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i = \iint_S \varphi(N) \frac{\cos\varphi_0}{r^2} dS + 2\pi\varphi(N_0);$$

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_l = \iint_S \varphi(N) \frac{\cos\varphi_0}{r^2} dS - 2\pi\varphi(N_0). \qquad (15.10)$$

§15.3. Логарифмічні потенціали

У випадку площини потенціали простого та подвійного шарів (15.4) та (15.5) називаються ***логарифмічними потенціалами*** відповідно, простого та подвійного шарів і мають вигляд

$$u(M) = \int_L \varphi(N) \ln\frac{1}{r} dL; \qquad (15.11)$$

$$u(M) = -\int_L \mu(N) \frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right) dL = \int_L \mu(N) \frac{\cos\varphi}{r} dL, \qquad (15.12)$$

де L - деяка замкнена крива на площині; $\varphi(N), \mu(N)$ - відомі функції змінної точки $N(\xi, \eta)$ на кривій L.

Властивості потенціалів (15.11) та (15.12) аналогічні до властивостей потенціалів (15.4) та (15.5). В області, яка не містить точок контуру L, функції (15.11), (15.12) є гармонічними. Аналогічно, для логарифмічного потенціалу подвійного шару (15.12)

$$u_i(N_0) = \int_L \mu(N) \frac{\cos\varphi}{r_0} dL + \pi\mu(N_0),$$

$$u_l(N_0) = \int_L \mu(N) \frac{\cos\varphi}{r_0} dL - \pi\mu(N_0),$$

а для логарифмічного потенціалу простого шару (15.11)

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i = \int_{\mathrm{L}} \varphi(\mathrm{N}) \frac{\cos\varphi_0}{\mathrm{r}} dL + \pi\varphi(N_0),$$

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_l = \int_{\mathrm{L}} \psi(\mathrm{N}) \frac{\cos\varphi_0}{\mathrm{r}} dL - \pi\varphi(N_0).$$

РОЗДІЛ 5
Елементи теорії інтегральних рівнянь

ТЕМА 16. Класифікація інтегральних рівнянь

§16.1. Класифікація лінійних інтегральних рівнянь

Рівняння виду

$$\int_D K(M,P)\varphi(P)dP = f(M) \tag{16.1}$$

називається ***інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду***. Тут φ - шукана функція; $f(M)$, $K(M,P)$ - задані функції; D – деяка *фіксована* область n-вимірного простору; $M = M(x_1, x_2, ..., x_n)$, $P = P(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

Рівняння виду

$$\varphi(M) - \lambda\int_D K(M,P)\varphi(P)dP = f(M) \tag{16.2}$$

називається інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду. Тут λ - деякий числовий параметр.

Інтегральні рівняння виду

$$\int_{D(M)} K(M,P)\varphi(P)dP = f(M)$$

та

$$\varphi(M) - \lambda \int_{D(M)} K(M,P)\varphi(P)dP = f(M),$$

де $D(M)$ – *змінна* область, яка залежить від точки M, називаються ***інтегральними рівняннями Вольтерра*** першого та другого родів відповідно.

Якщо $f(M) \equiv 0$, то рівняння (16.1), (16,2) називаються ***однорідними***, в протилежному випадку – ***неоднорідними*** рівняннями Фредгольма. Функція $K(M,P)$ називається ***ядром інтегрального рівняння***.

Інтегральні рівняння Вольтерра є частинним випадком інтегральних рівнянь Фредгольма. Наприклад, якщо в одновимірному випадку покласти

$$K_1(x,s) = \begin{cases} 0, \; \text{при} \; x < s < b, \\ K(x,s), \; \text{при} \; a < s \le x, \end{cases}$$

то інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x)$$

можна записати як інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з ядром $K_1(x,s)$

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K_1(x,s)\varphi(s)ds = f(x),$$

де $[a,b]$ - деякий заданий відрізок. Ядра $K_1(x,s)$ вказаного виду інколи ще називаються ***ядрами Вольтерра***.

§16.2. Інтегральні рівняння з виродженими ядрами

Ядро $K(M,P)$ називається ***виродженим***, якщо воно має вигляд

$$K(M,P) = \sum_{i=1}^{n} a_i(M) \cdot b_i(P), \tag{16.3}$$

де система функцій $a_1(M)$, $a_2(M)$, ..., $a_n(M)$ є лінійно незалежною.

Розв'язання рівнянь Фредгольма другого роду з виродженим ядром зводиться до знаходження розв'язків СЛАР. Підставляючи в рівняння (16.2) ядро (16.3), отримаємо

$$\varphi(M) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i a_i(M) + f(M), \tag{16.4}$$

де

$$c_i = \int_D b_i(P)\varphi(P)dP \cdot$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (16.2) з виродженим ядром (16.3) потрібно шукати у вигляді (16.4). Підставляючи (16.4) в (16.2), маємо

$$\lambda\sum_{i=1}^{n} c_i a_i(M) + f(M) - \lambda\int_D \sum_{i=1}^{n} a_i(M) b_i(P)\left[\lambda\sum_{j=1}^{n} c_j a_j(P) + f(P)\right]dP = f(M),$$

$$\lambda\sum_{i=1}^{n} c_i a_i(M) = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} a_i(M)\left[\sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_{ij} + \beta_i\right],$$

де $\alpha_{ij} = \int_D b_i(P)\ a_j(P)dP$; $\beta_i = \int_D f(P) b_i(P)dP$.

Прирівнюючи коефіцієнти при одних і тих же функціях $a_i(M)$, $i = \overline{1,n}$, зліва і справа вищенаведеної рівності, отримуємо СЛАР відносно невідомих c_i

$$c_i = \lambda(\sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_{ij} + \beta_i),\ i = \overline{1,n}.$$

Розв'язавши дану СЛАР, знайдемо коефіцієнти c_i, а отже і розв'язок рівняння (16.2) з виродженим ядром (16.3) у вигляді (16.4).

§16.3. Теореми Фредгольма

Розглядаємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду в одновимірному випадку

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \qquad (16.5)$$

та відповідне йому однорідне інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds. \qquad (16.6)$$

Рівняння (16.6) має тривіальний розв'язок $\varphi(x) \equiv 0$.

Значення параметра λ, при яких рівняння (16.6) має нетривіальні розв'язки називаються ***власними значеннями*** рівняння (16.6) (ядра $K(x,s)$), а відповідні їм розв'язки - ***власними функціями*** рівняння (або ядра).

Теорема 16.1. Якщо у рівнянні (16.5) λ не дорівнює власному значенню відповідного однорідного рівняння (16.6), то розв'язок рівняння (16.5) єдиний.

Доведення. Припустимо, що рівняння (16.5) має два розв'язки $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$. Тоді справедливі рівності

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_1(s)ds\,,$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_2(s)ds\,.$$

Віднімаючи почленно вищенаведені рівняння, отримаємо

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)(\varphi_1(s) - \varphi_2(s))ds\,. \qquad (16.7)$$

Оскільки λ не є власним значенням, то (16.7) має лише тривіальні розв'язки, тобто $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \equiv 0$ або $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$.

Теорема 16.1 доведена.

Теорема 16.2 (Перша теорема Фредгольма). Для довільного λ, не рівного власному значенню, рівняння (16.5) має розв'язок і цей розв'язок єдиний.

Спряженим до рівняння (16.5) називається рівняння вигляду

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(s,x)\psi(s)ds = f(x). \qquad (16.8)$$

Теорема 16.3 (Друга теорема Фредгольма). Якщо λ є власним значенням ядра $K(x,s)$, то як однорідне інтегральне рівняння (16.6), так і спряжене йому рівняння мають скінченне число лінійно незалежних розв'язків.

Теорема 16.4 (Третя теорема Фредгольма). Нехай λ є власним значенням ядра $K(x,s)$. Тоді для того, щоб рівняння (16.5) мало розв'язок, необхідно і достатньо, щоб функція $f(x)$ була ортогональною всім власним функціям спряженого однорідного рівняння, які відповідають даному власному значенню.

Неоднорідне рівняння Вольтерра має розв'язок при довільних λ. Тобто, рівняння Вольтерра не має власних значень.

<u>ТЕМА 17.</u> Наближені методи розв'язання інтегральних рівнянь

§17.1. Метод послідовних наближень

Розглядаємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду в одновимірному випадку

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x). \tag{17.1}$$

Зробимо наступні припущення:

1) Ядро $K(x,s)$ є неперервною функцією у квадраті $a \le x \le b,\ a \le s \le b$. Тоді воно обмежене деякою додатною константою A, тобто $|K(x,s)| \le A$;

2) Функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$. Тоді вона обмежена на даному відрізку деякою додатною константою B, тобто $|f(x)| \le B$.

Розв'язок рівняння (17.1) будемо шукати у вигляді послідовності функцій

$$\varphi_1(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_0(s)ds + f(x), \tag{17.2}$$

де φ_0 - довільна інтегрована функція;

$$\varphi_2(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_1(s)ds + f(x), \tag{17.3}$$

....

$$\varphi_n(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_{n-1}(s)ds + f(x), \tag{17.4}$$

....

Теорема 17.1. При значеннях $|\lambda| < \dfrac{1}{A(b-a)}$ послідовність функцій (17.2)-(17.4) $\varphi_i(x), i = 1,2,...,$ рівномірно збігається на відрізку $[a,b]$ до функції $\varphi\ (x)$, яка є розв'язком рівняння (17.1).

Доведення. Перетворимо формули для отримання функцій $\varphi_i(x), i = 1,2,...$. Підставляючи функцію $\varphi_1(x)$ в (17.3), отримаємо

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x,s)\ f(s)ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,t)\varphi_0(t)dt,$$

де $K_1(x,s) = K(x,s);\ K_2(x,t) = \int_a^b K_1(x,s)K(s,t)ds$.

Аналогічно,

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x,s)\ f(s)ds +$$

$$+\lambda^2 \int_a^b K_2(x,s) f(s)ds + ... + \lambda^n \int_a^b K_n(x,t)\varphi_0(t)dt,$$

де $K_n(x,t) = \int_a^b K_1(x,s)K_{n-1}(s,t)ds$.

Границя послідовності функцій $\varphi_n(x)$, якщо вона існує, дорівнює сумі ряду

$$\overline{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x,s) f(s)ds +$$

$$+\lambda^2 \int_a^b K_2(x,s) f(s)ds + ... + \lambda^n \int_a^b K_n(x,s) f(s)ds + ... \quad (17.5)$$

Доведемо рівномірну збіжність ряду (17.5). Для цього оцінимо величини $\int_a^b K_n(x,s) f(s)ds$. Очевидно, що

$$\left|K_2(x,s)\right| \le \int_a^b \left|K_1(x,t)\right| \cdot \left|K_1(t,s)\right| dt \le A^2 \int_a^b dt = A^2 (b-a);$$

$$\left|K_3(x,s)\right| \le \int_a^b \left|K_1(x,t)\right| \cdot \left|K_2(t,s)\right| dt \le A^3 (b-a)^2 ;$$

....

$$\left|K_n(x,s)\right| \le \int_a^b \left|K_1(x,t)\right| \cdot \left|K_{n-1}(t,s)\right| dt \le A^n (b-a)^{n-1} .$$

Отже,

$$\left|\int_a^b K_n(x,s) f(s) ds\right| \le \int_a^b \left|K_n(x,s)\right| \cdot \left|f(s)\right| ds \le$$

$$\le A^n (b-a)^{n-1} \int_a^b \left|f(s)\right| ds \le A^n B (b-a)^{n-1} \int_a^b ds =$$

$$= A^n B (b-a)^n .$$

Тому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} B A^n \left|\lambda\right|^n (b-a)^n \qquad (17.6)$$

є мажорантним для ряду (17.5). Якщо $\left|\lambda\right| < \dfrac{1}{A(b-a)}$, то ряд (17.6) збігається. Отже, при таких λ ряд (17.5) рівномірно збігається, а з ним збігається також послідовність функцій $\{\varphi_i(x)\}$ до функції $\overline{\varphi}(x)$. Дана функція $\overline{\varphi}(x)$ є розв’язком рівняння (17.1). Перейшовши до границі у (17.4) при $n \to \infty$, отримаємо

$$\overline{\varphi}(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) \overline{\varphi}(s) ds + f(x) .$$

Перехід під знаком інтеграла до границі тут законний, оскільки послідовність функцій збігається рівномірно.

Теорема 17.1 доведена.

При $|\lambda| < \dfrac{1}{\mathrm{A}(b-a)}$ збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}^n |\lambda|^{n-1} (b-a)^n$. Оскільки даний ряд є мажорантним для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s)$ збігається рівномірно. Тому ряд (17.5) можна записати у вигляді

$$\overline{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s) \right] f(s) ds$$

або

$$\overline{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s) ds, \tag{17.7}$$

де функція $R(x,s,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s)$ називається ***резольвентою*** рівняння (17.1).

Якщо застосувати вищеописаний метод (який називається методом послідовних наближень) до рівняння Вольтерра

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x \varphi(s) K(x,S) ds = f(x),$$

то отримана послідовність функцій

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \varphi_0(s) K(x,s) ds,$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s) \varphi_1(s) ds,$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s) \varphi_{n-1}(s) ds,$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

буде збігатися рівномірно на відрізку $[a,b]$ при довільних значеннях λ.

§17.2. Наближені методи розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

Описаний у попередньому параграфі метод може служити наближеним методом розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Як наближений розв'язок треба брати функції $\varphi_n(x)$, визначені формулами (17.2)–(17.4).

Другий метод знаходження наближеного розв'язку інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду (17.1) полягає в тому, що ядро $K(x,s)$ апроксимують з належною точністю виродженим ядром $\overline{K}(x,s)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(s)$. Розв'язок рівняння з ядром $\overline{K}(x,s)$ і буде наближеним розв'язком вихідного рівняння (17.1).

Третій метод називається методом сіток. Відрізки $[a;b]$ зміни змінних x та s розбивають на n однакових частин точками поділу x_i, s_j, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$. Замінюючи інтеграл $\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$ в рівнянні (17.1) інтегральною сумою, отримаємо співвідношення

$$\varphi(x)\approx\lambda\sum_{j=1}^{n}K(x,s_j)\varphi_j\Delta s_j+f(x).$$

Послідовно покладаючи змінну x рівною x_i ($i=\overline{1,n}$), отримаємо СЛАР

$$\varphi_i=\lambda\sum_{j=1}^{n}K_{ij}\varphi_j\Delta s_j+f_i,\ i=\overline{1,n}, \qquad (17.8)$$

де $\varphi_i=\varphi(x_i), K_{ij}=K(x_i,s_j), f_i=f(x_i), \Delta s_j=s_{j+1}-s_j$. Розв'язуючи дану СЛАР відносно невідомих φ_i, одержимо значення наближеного розв'язку у вузлових точках x_i, $i=\overline{1,n}$.

§17.3. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду

Наближені методи розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду вимагають особливого розгляду. Розглянемо наступне інтегральне рівняння:

$$\int_a^b \mathrm{K}(x,s)\varphi(s)ds = f(x),\ a \le x \le b, \tag{17.9}$$

де $\varphi(s)$ - шукана функція із підпростору Φ, $f(x)$ - задана функція із простору F. Будемо вважати, що ядро $K(x,s)$ по змінній x є неперервною функцією з неперервною частинною похідною $\dfrac{\partial K}{\partial x}$.

Оператор $\int_a^b \mathrm{K}(x,s)\varphi(s)ds$ для скорочення позначимо через $A\varphi$. В результаті отримаємо аналог рівняння (17.9) у вигляді

$$A\varphi = f(x),\ a \le x \le b. \tag{17.10}$$

Розв'язок $\varphi(s)$ шукаємо в класі неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій. Відхилення правої частини будемо оцінювати в квадратичній метриці (метрика L_2)

$$\rho_{L_2}(f_1,f_2) = \left\{\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))^2 dx\right\}^{1/2},$$

а відхилення розв'язку $\varphi(s)$ – в рівномірній метриці (метрика C)

$$\rho_C(\varphi_1,\varphi_2) = \max_{s\in[a;b]}\left|\varphi_1(s) - \varphi_2(x)\right|.$$

Нехай для деякої правої частини $f_1(x)$ функція $\varphi_1(s)$ є розв'язком рівняння (17.9). Якщо замість функції $f_1(x)$ нам відомо деякі її наближення, які мало відрізняються (в метриці L_2) від $f_1(x)$, то мова може йти тільки про знаходження наближеного до $\varphi_1(x)$ розв'язку рівняння (17.9). При цьому права частина $f(x)$ може не володіти достатньою гладкістю. Вона може бути отримана в експерименті, наприклад, за допомогою самописця і мати кутові точки. При такій правій частині рівняння (17.9) не має розв'язку, оскільки ядро $K(x,s)$ є гладкою функцією. Отже, в якості наближеного до $\varphi_1(s)$ розв'язку (17.9) не можна брати точний розв'язок рівняння (17.9) з наближено відомою правою частиною. В цих умовах не виконується вимога існування розв'язку задачі для її (задачі) коректності. Виникає принципове питання: що потрібно розуміти під наближеним розв'язком рівнянням (17.9) з наближено відомою правою частиною?

Крім того, задача (17.9) не володіє властивістю стійкості. Дійсно, функція $\varphi_2(s) = \varphi_1(s) + B\sin(ns),\quad n \in N$ є розв'язком рівняння (17.9) з правою частиною

$$f_2(x) = f_1(x) + B\int_a^b \mathrm{K}(x,s)\sin(ns)ds\,.$$

Яке б не було число $B > 0$, при досить великих n відхилення

$$\rho_{L_2}(f_1, f_2) = B\left\{\int_a^b \left[\int_a^b \mathrm{K}(x,s)\sin(ns)ds\right]^2 dx\right\}^{1/2}$$

можна зробити як завгодно малим внаслідок прямування до нуля коефіцієнтів Фур'є функції $K(x,s)$ з ростом їх номера n. В той же час для відповідних розв'язків $\varphi_1(s)$ і $\varphi_2(s)$

$$\rho_C(\varphi_1, \varphi_2) = \max_{s\in[a;b]} B\left|\sin ns\right| = B\,.$$

Отже, задача (17.9) є некоректною. До таких рівнянь приводять задачі фізики і техніки, наприклад, задачі спектроскопії (визначення розподілу щільності енергії випромінювання по спектру за результатами вимірювань), обернені задачі астрономії і ін.

Таким чином, потрібно не тільки дати відповідь на питання, що розуміти під наближеним розв'язком рівняння (17.9), але і вказати такий алгоритм його побудови, який володіє властивістю стійкості до малих змін правої частини $f(x)$.

§ 17.4. Деякі методи розв'язання некоректних задач

Методи відшукання наближених розв'язків некоректно поставлених задач виду (17.10) почали цікавити математиків досить давно. Одним із таких способів побудови розв'язку є метод підбору. Він полягає в тому, що обраховується ліва частина рівняння (17.10) для деякої підмножини (набору) Φ_1 елементів φ, які належать Φ. В якості шуканого наближеного розв'язку вибирається такий елемент φ_1 із Φ_1, для якого нев'язка $\rho_{L_2}(A\varphi, f)$ мінімальна. Якщо додатково відомо, що шуканий розв'язок $\varphi_T \in \Phi_1$ і $A\varphi_T = f_T$, то $inf\,\rho_{L_2}(A\varphi, f_T) = 0$ і досягається дана нижня межа на точному розв'язку рівняння $Af = u_T$. При цьому виникає питання: якщо $\{\varphi_n\}$ є послідовністю елементів, на якій нев'язка $\rho_{L_2}(A\varphi, f_T)$, при $n \to \infty$, прямує до нуля, то чи буде послідовність $\{\varphi_n\}$ прямувати до точного розв'язку φ_T? Якщо додатково відомо, що кожний параметр є обмеженим, то Φ_1 буде компактною і $\{\varphi_n\}$ буде збігатися до φ_T, тобто, метод підбору дозволяє отримати в цьому випадку наближений розв'язок. В інших умовах метод підбору, взагалі кажучи, не годиться для побудови наближених розв'язків.

В 1963 р. А. М. Тихонов [48] розробив новий підхід до розв'язання некоректно поставлених задач, який дозволяє будувати наближені розв'язки рівняння (17.10), стійкі до малих змін початкових даних. В основі даного підходу лежить фундаментальне поняття регуляризуючого оператора. Для простоти викладення вважаємо, що в рівнянні (17.10) наближеною може бути лише права частина f, а оператор A відомий точно. Нехай елементи $\varphi_T \in \Phi$, $f_T \in F$ пов'язані співвідношенням $A\varphi_T = f_T$. Якщо задача (17.10) є некоректно поставленою (не володіє властивістю стійкості) і замість точного значення правої частини f_T, ми маємо елемент f_δ, для якого $\rho_{L_2}(f_T, f_\delta) \le \delta$, то очевидно, що наближений розв'язок φ_δ не може бути визначений як точний розв'язок рівняння (17.10) з наближеною правою частиною f_δ. Елемент φ_δ можна визначити за допомогою оператора, залежного від деякого параметра, значення якого (параметра) потрібно брати узгодженим з точністю задання f_δ. Дана узгодженість повинна бути такою, щоб при наближенні правої частини f_δ рівняння (17.10) до точного значення f_T, тобто, при $\delta \to 0$, наближений розв'язок φ_δ прямував до шуканого точного розв'язку φ_T рівняння $A\varphi = f_T$.

Оператор $R(f,\alpha)$, залежний від параметра α, називається регуляризуючим оператором для рівняння (17.10), якщо він володіє наступними властивостями:

1. $R(f,\alpha)$ визначений для будь-якого $\alpha > 0$ і для будь-якого $f \in F$;
2. Якщо $A\varphi_T = f_T$, то $\exists\, \alpha(\delta)$, що $\forall\, \varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon)$, що як тільки $\rho_{L_2}(f_T, f_\delta) \le \delta(\varepsilon)$, то $\rho_C(\varphi_T, \varphi_\alpha) \le \varepsilon$, де $\varphi_\alpha = R(f_\delta, \alpha)$ і $\alpha = \alpha(\delta)$.

За Тихоновим, в якості наближеного розв'язку рівняння (17.10) потрібно брати елемент $\varphi_\alpha = R(f_\delta, \alpha(\delta))$, отриманий за допомогою регуляризуючого оператора $R(f,\alpha)$, де параметр $\alpha(\delta)$ є узгодженим з рівнем помилковості початкових даних. Цей розв'язок називається регуляризованим розв'язком рівняння (17.10). Числовий параметр α називається параметром регуляризації.

Очевидно, що всякий ругуляризуючий оператор разом з вибором параметра регуляризації α, який узгоджений з рівнем помилковості початкових даних δ, визначає стійкий метод побудови наближених розв'язків рівняння (17.10).

Якщо відомо, що $\rho_{L_2}(f_T, f_\delta) \le \delta$, то, відповідно означенню регуляризуючого оператора, можна так вибрати значення параметра регуляризації $\alpha = \alpha(\delta)$, що при $\delta \to 0$ регуляризований розв'язок $\varphi_{\alpha(\delta)} = R(f_\delta, \alpha(\delta))$ буде прямувати до шуканого точного розв'язку φ_T. Це і обгрунтовує пропозицію брати в якості наближених розв'язків рівняння (17.10) регуляризовані розв'язки.

Таким чином задача зводиться:
1. До знаходження регуляризуючих операторів;
2. До оцінки параметра регуляризації α за додатковою інформацією про задачу, наприклад за величиною відхилення правої частини f_δ від її точного значення.

В математичній літературі описаний метод побудови наближених розв'язків некоректних задач називається методом регуляризації.

Відмітимо, що регуляризуючі оператори, залежні від параметра, використовувались ще з часів Ньютона. Так, класична задача наближеного обрахунку похідної $\frac{du}{dx}$ за наближеним (в метриці C) значенням $u(x)$ може бути розв'язана за допомогою оператора

$$R(u,\alpha)=\frac{u(x+\alpha)-u(x)}{\alpha}.$$

Дійсно, нехай замість точних значень функції $u(x)$ ми маємо наближені значення $u_\delta(x)=u(x)+v(x)$, де $|v(x)|\le\delta$ для будь-якого x. Тоді

$$R(u_\delta,\alpha)=\frac{u(x+\alpha)-u(x)}{\alpha}+\frac{v(x+\alpha)-v(x)}{\alpha}.$$

При $\alpha\to 0$ перший дріб прямує до похідної $\frac{du}{dx}$. Оцінимо другий дріб

$$\left|\frac{v(x+\alpha)-v(x)}{\alpha}\right|\le\frac{2\delta}{\alpha}.$$

Якщо покласти $\alpha=\frac{\delta}{\eta(\delta)}$, де $\eta(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$, то $\frac{2\delta}{\alpha}=2\eta(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$ і, відповідно, при $\alpha=\alpha(\delta)=\frac{\delta}{\eta(\delta)}$ $R(u_\delta,\alpha(\delta))\to\frac{du}{dx}$.

Друга класична задача – задача відновлення функції за її наближено відомими коефіцієнтами Фур′є (задача підсумовування рядів Фур′є) – також розв'язується за допомогою регуляризуючих операторів.

Дійсно, нехай для будь-якого x, який належить деякому скінченному проміжку, $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\varphi_k(x)$ є рядом Фур′є функції $z(x)$ по повній ортонормованій системі функцій $\{\varphi_k(x)\}$ таких, що для будь-якого k $\sup_x|\varphi_k(x)|\le M$. Нехай замість послідовності $\{u_k\}$ коефіцієнтів Фур′є нам відомі їх наближені значення $\{\overleftarrow{u}_k\}$ такі, що

$\sum_{k=1}^{\infty}(u_k-\bar{u}_k)^2\le\delta^2$ і $\bar{f}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{u}_k\varphi_k(x)$. В метриці C функції $z(x)$ і $\bar{f}(x)$ в фіксованій точці x_0 можуть відрізнятися на як завгодно велику величину. Тому не можна брати в якості наближеного значення функції $z(x)$ в точці x_0 значення $\bar{f}(x_0)$. Стійке (до малих змін δ) наближене значення функції $z(x)$ визначається за допомогою оператора $R(u,\alpha)=R(u,\frac{1}{n})=\sum_{k=1}^{n}\bar{u}_k\varphi_k(x_0)$ $(\alpha=\frac{1}{n})$, якщо n брати рівним цілій частині функції $\frac{\eta(\delta)}{\delta^2}$, тобто $n=n(\delta)=\left[\frac{\eta(\delta)}{\delta^2}\right]$, де $\delta\to 0$, $\eta(\delta)\to 0$, $n(\delta)\to\infty$.

Дійсно, оскільки для будь-якого k виконується умова $|\varphi_k(x)|\le M$, то

$$\left|f(x_0)-\sum_{k=1}^{n(\delta)}\bar{u}_k\varphi_k(x_0)\right|\le\left|\sum_{k=1}^{n(\delta)}(u_k-\bar{u}_k)\varphi_k(x_0)\right|+\left|\sum_{k=n(\delta)+1}^{\infty}u_k\varphi_k(x_0)\right|.$$

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k\varphi_k(x_0)$ збігається, то його залишок $\sum_{k=n(\delta)+1}^{\infty}u_k\varphi_k(x_0)$ прямує до нуля при $n(\delta)\to\infty$. Далі, використовуючи нерівність Коші-Буняковського, отримаємо

$$\left|\sum_{k=1}^{n(\delta)}(u_k-\bar{u}_k)\varphi_k(x_0)\right|\le\sum_{k=1}^{n(\delta)}\left|u_k-\bar{u}_k\right|\left|\varphi_k(x_0)\right|\le\left\{\sum_{k=1}^{n(\delta)}(u_k-\bar{u}_k)^2\sum_{k=1}^{n(\delta)}\varphi_k^2(x_0)\right\}^{1/2}\le$$

$$\le M\left\{n(\delta)\sum_{k=1}^{n(\delta)}\left|u_k-\bar{u}_k\right|^2\right\}^{1/2}\le M\sqrt{n(\delta)\delta^2}=M\sqrt{\left[\frac{\eta(\delta)}{\delta^2}\right]\delta^2}\to 0$$

при $\delta\to 0$. Отже, $\left|f(x_0)-\sum_{k=1}^{n(\delta)}\bar{u}_k\varphi_k(x_0)\right|\to 0$ при вищевказаному способі вибору $n(\delta)$.

<u>ТЕМА 18.</u> Зведення крайових задач для рівнянь еліптичного типу до розв'язування інтегральних рівнянь

§18.1. Задача Діріхле для рівняння Лапласа

Метод розділення змінних і метод функції Гріна дозволяють отримати розв'язки крайових задач для рівнянь еліптичного типу лише у випадках областей найпростішого вигляду. Зведення крайових задач для рівнянь Лапласа або Пуассона за допомогою поверхневих потенціалів до інтегральних рівнянь з одного боку зручне для теоретичного дослідження питань існування та єдності розв'язку крайових задач, а з іншого боку дає можливість ефективного числового розв'язання даних задач для областей складної форми.

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння Лапласа в області D, яка обмежена межею S

$$\Delta u = 0, \tag{18.1}$$

$$u\big|_s = f\left(M\right),\ M(x, y, z) \in S. \tag{18.2}$$

Розв'язок задачі (18.1), (18.2) будемо шукати у вигляді потенціалу подвійного шару

$$u = \iint_s \mu\left(P\right)\frac{\cos\varphi}{r^2}dS \tag{18.3}$$

з невідомою густиною μ. Потенціал подвійного шару (18.3) є гармонічною функцією в області D. Отже, густину μ потрібно знайти з умови, що граничне значення потенціалу (18.3) при прямуванні до границі S зсередини області D має дорівнювати $f(M)$.

Використовуючи результати теореми 15.3, маємо

$$u(M) + 2\pi\mu(M) = f(M)$$

або

$$\mu(M)+\frac{1}{2\pi}\iint_S \mu(P)\frac{\cos\varphi}{r^2}dS=\frac{f(M)}{2\pi}. \qquad (18.4)$$

Отже, для знаходження функції $\mu(M)$ отримали інтегральне рівняння Фредгольма другого роду (18.4).

§18.2. Задача Неймана для рівняння Лапласа

Розглянемо задачу Неймана для рівняння Лапласа в області D, яка обмежена границею S

$$\Delta u = 0, \qquad (18.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = f_1(M), \quad M(x,y,z)\in S. \qquad (18.6)$$

Розв’язок задачі (18.5), (18.6) будемо шукати у вигляді потенціалу простого шару

$$u=\iint_S \frac{\varphi(P)}{r}dS$$

з невідомо густиною φ. Використовуючи формули (15.10) для нормальної похідної потенціалу простого шару зсередини області D, отримуємо

$$\iint_S \varphi(P)\frac{\cos\varphi_0}{r^2}dS+2\pi\varphi(M)=f_1(M)$$

або

$$\varphi(M)+\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\cos\varphi_0}{r^2}\varphi(P)dS = f_1(M). \qquad (18.7)$$

Отже, задача відшукання густини $\varphi(M)$ звелась до розв’язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду (18.7).

§17.3. Задача Діріхле для рівняння Пуассона

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння Пуассона в області D, яка обмежена поверхнею S

$$\Delta u = f(M),\ M(x,y,z) \in D, \tag{18.8}$$

$$u\big|_S = f_1(M), \quad M(x,y,z) \in S. \tag{18.9}$$

Згідно властивостей (див. тема 15), об'ємний потенціал з густиною $-\dfrac{f(M)}{4\pi}$

$$u_1(M) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D \frac{f(P)}{r}\,d\xi d\eta d\zeta$$

є частинним розв'язком рівняння (18.8). Тому, природно шукати розв'язок задачі (18.8), (18.9) у вигляді суми $u(M) = u_1(M) + u_2(M)$, де невідома функція $u_2(M)$ визначається з наступної крайової задачі:

$$\Delta u_2 = 0, \tag{18.10}$$

$$u_2\big|_S = F(M),\ M \in S, \tag{18.11}$$

де $F(M) = f_1(M) - u_1(M), M \in S.$

Задача (18.10), (18.11) розглянута в §18.1.

Література

Базова

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.- М.: Наука,1977.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984.
3. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001.
4. Мартинюк П.М. Рівняння математичної фізики. – Рівне: НУВГП, 2007.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2,4. – М.: Наука, 1981.
6. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики.- Москва: Наука, 1968.
7. Бугаєнко Г.О. Методи математичної фізики. К.: Вища школа, 1970.

Допоміжна

1. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1980.
2. Соболев С.Л. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1966.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1988.
4. Адамян В.М., Сушко М.Я. Вступ до математичної фізики. Introduction to mathematical physics. – Одеса: Астропринт, 2003.
5. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984.

Інформаційні ресурси: бібліотека, інтернет.

Шкала оцінювання: національна та ECTS

<table>
<tr><td rowspan="2">Сума балів за всі види навчальної діяльності</td><td rowspan="2">Оцінка ECTS</td><td colspan="2">Оцінка за національною шкалою</td></tr>
<tr><td>для екзамену, курсового проекту (роботи), практики</td><td>для заліку</td></tr>
<tr><td>90 – 100</td><td>A</td><td>відмінно</td><td rowspan="5">зараховано</td></tr>
<tr><td>80 – 89</td><td>B</td><td rowspan="2">добре</td></tr>
<tr><td>70 – 79</td><td>C</td></tr>
<tr><td>60 – 69</td><td>D</td><td rowspan="2">задовільно</td></tr>
<tr><td>50 – 59</td><td>E</td></tr>
<tr><td>26 – 49</td><td>FX</td><td>незадовільно з можливістю повторного складання</td><td>не зараховано з можливістю повторного складання</td></tr>
<tr><td>0-25</td><td>F</td><td>незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни</td><td>не зараховано з обов’язковим повторним вивченням дисципліни</td></tr>
</table>